THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Florent VERREAULT

1re THÈSE : L'inversion des périodes propres de torsion de la Terre.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté :

Informations apportées par les expériences d'ondes de choc sur les propriétés internes du Globe.

Soutenues le 17 Juin 1966 devant la Commission d'examen :

MM. J. COULOMB *Président.*

E. THELLIER, Mme N. JOBERT } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7e

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Florent VERREAULT

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

1re THÈSE : L'inversion des périodes propres de torsion de la Terre.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté :

Informations apportées par les expériences d'ondes de choc sur les propriétés internes du Globe.

Soutenues le 17 Juin 1966 devant la Commission d'examen :

MM. J. COULOMB *Président.*

E. THELLIER
Mme N. JOBERT } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7e

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Doyen. . . . . M. ZAMANSKY

PROFESSEURS

PRENANT. . . .	T	Anatomie et histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST. . . .	T	Chimie organique.
WYART.	T	Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER. . . .	T	Zoologie.
AUGER.	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER. . . .	T	Physiologie générale.
PIVETEAU . . .	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE. . . .	T	Chimie générale.
N	T	Géométrie supérieure.
COULOMB. . . .	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN . .	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN . . .	T	Chimie minérale.
BOCQUET. . . .	T	Zoologie.
KASTLER. . . .	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI. . . .	T	Génétique.
GAUTHERET. . .	T	Biologie végétale (C. P. E. M.).
LUCAS R. . . .	T	Recherches physiques.
THOMAS A. . . .	T	Biologie cellulaire.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET . . .	T	Physique (C. P. E. M.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique de l'atmosphère.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN . . .	T	Botanique.
DE CUGNAC. . .	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS .	T	Chimie physique.
THELLIER . . .	T	Physique du globe.
PONCIN.	T	Mécanique générale.
DUBREIL. . . .	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD . . .	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER . .	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER . . .	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN . . .	T	Chimie organique et structurale.
VASSY.	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES . .	T	Théorie physique.
AMIEL.	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et cristallographie.
MATHIEU J.-P. .	T	Physique optique.
COUTEAUX . . .	T	Cytologie.
CHOQUET. . . .	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN . . .	T	Biologie végétale marine.
JOST.	T	Physiologie comparée.
FORTET.	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ . . .	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD. . . .	T	Physiologie végétale.
MALAVARD . . .	T	Aviation (Technique aéronautique).
BRELOT	T	Analyse supérieure.
NORMANT . . .	T	Synthèse organique.
BENARD	T	Chimie appliquée.
DUGUE	T	Statistique mathématique.
SOULAIRAC. . .	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée.
KIRRMANN. . .	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD . .	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS. . .	T	Anatomie et histologie comparée.
EHRESMANN . .	T	Topologie algébrique.
FRANÇON. . . .	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
DODEMENT. . .	T	Mathématiques (M. G. P.).
PISOT.	T	Technique mathématique de la physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN . .	T	Astrophysique.
TERMIER. . . .	T	Géologie générale.
ZAMANSKY . . .	T	Mathématiques générales.
LENNUIER. . . .	T	Physique (M. G. P.).
ROUTHIER . . .	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT.	T	Physique théorique.
DIXMIER. . . .	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY. . . .	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique.
BRUSSET. . . .	T	Chimie systématique.
LÉVY.	T	Physique théorique des hautes énergies.
Mme CHAIX. . .	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY.	T	Biologie végétale (C. P. E. M.).
PANNETIER . . .	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des fluides, I.
Mme DUBREIL .	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG . .	T	Mathématiques, II (E. N. S.).
BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E. . .	T	Chimie organique.
LAMOTTE. . . .	T	Zoologie (E. N. S.).
OLMER	T	Energétique générale.
GAUTHIER . . .	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ . .	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER.	T	Physiologie comparée.
CAMUS.	T	Physiologie végétale.
CURIEN	T	Minéralographie et cristallographie.
POSSOMPES. . .	T	Zoologie.
PULLMANN . . .	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radioactivité.
VILLE	T	Économétrie.
WILLEMART. . .	T	Chimie (C. P. E. M.).
FREYMANN. . .	T	Recherches physiques.
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN. . .	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY. . .	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
GERMAIN. . . .	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS (G). . . .	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT. . .	T	Physique des particules fondamentales.
BRICARD	T	Météorologie.
Mme ALBE-FESSARD.	T	Psycho-physiologie.
M. JULIA. . . .	T	Étude des molécules naturelles complexes.
MAGAT.	T	Physico-chimie des rayonnements.
Mlle QUINTIN. .	T	Électrochimie.
MONOD.	T	Chimie du métabolisme.
DE POSSEL. . .	T	Analyse numérique.
CHARLOT. . . .	T	Chimie analytique.
CHATELET (M) .	T	Chimie (C. P. E. M.).
MATTLER. . . .	T	Physique (S. P. C. N.).
BOUISSIÈRES . .	T	Radiochimie.
Mme COUTURE. .	T	Thermodynamique et mécanique physique.
FRANC.	T	Biologie animale (C. P. E. M.).
SCHNELL. . . .	T	Botanique tropicale.
STOLKOWSKI . .	T	Physiologie générale.
ACHER.	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale (C. P. E. M.).
BEAUMONT . . .		Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT. . . .		Géophysique ionosphère.
BOUREAU. . . .	T	Botanique.
CURIE D. . . .		Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA.	T	Géologie.
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT. . . .	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX. . . .	T	Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire.
Mlle FOURCROY .		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT . . .		Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle VEIL. . . .	T	Physiologie générale.
LWOFF.	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK. . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
CABANNES . . .	T	Mécanique générale.
CAIRE	T	Géographie physique et géologie dynamique.
COMOLET. . . .		Mécanique des fluides.
DELLOUE. . . .	T	Physique de l'exosphère.
HOUILLON . . .		Biologie animale (C. P. E. M.).
OLIVIER		Anthropologie.
SAMUEL	T	Mathématiques (E. N. S. jeunes filles).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELÈS		Physique (S. P. C. N.).
AMAT.	T	Thermodynamique
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL. . . .	T	Physique nucléaire et radioactivité.
BOUGIS.		Biologie marine, Villefranche-sur-mer.
RIGAUDY. . . .		Chimie (S. P. C. N.).
COLLONGUES . .		Chimie (C. P. E. M.).
DUBERT		Biochimie.
NOZIÈRES. . . .		Physique générale.

Cadiot		Chimie organique.
Ivanoff		Océanographie physique.
François		Zoologie.
Talbot		Génétique chimique.
Mme Nougarede		Botanique.
Bruhat	T	Mathématiques (M. P. C.).
Fournet		Électricité générale.
Deheuvels	T	Mathématiques (propédeutique).
Furon	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme Gans	T	Génétique.
Genèves		Biologie végétale (C. P. E. M.).
Hupé	T	Pétrographie.
Hollande	T	Biologie générale.
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte	T	Chimie organique.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel		Biologie générale.
Ravier	T	Pétrographie.
Morel F.		Physiologie comparée.
Roseau	T	Mécanique théorique des fluides.
Roubine	T	Électronique.
Silber	T	Chimie (C. P. E. M.).
Uebersfeld	T	Electronique.
Yvon	T	Théories physiques.
Hervé	T	Mathématiques.
Mme Pecker-Wimel	T	Astrophysique.
Balkansky		Physique (M. P. C.).
Le Corre	T	Électricité.
Nataf	T	Physique nucléaire et radioactivité.
Échalier		Biologie animale (P. C. B.).
Barraud		Physique (C. P. E. M.).
Dars		Géologie structurale et géologie appliquée.
Camefort	T	Botanique (agrégation).
Vichniewsky	T	Mécanique industrielle.
Sigwalt		Chimie (S. P. C. N.).
Blaquière		Électronique.
Baruch		Physique propédeutique.
Arnous	T	Physique théorique.
Slonimski		Génétique.
Malliavin	T	Mathématiques propédeutique.
Gaudemar		Chimie propédeutique.
Brousse	T	Mécanique théorique.
Rosch	T	Astronomie.
Guy	T	Physique expérimentale.
Lazard		Mathématiques (M. P. C.).
Morel Pierre		Physique (M. P. C.).
Arsac		Programmation.
Lefebvre		Chimie (M. P. C.).
Bok		Physique propédeutique.
Chapeville		Biochimie.
Benoit		Physique (C. P. E. M.).
Rio		Chimie (C. P. E. M.).
Jauzein		Géologie (E. N. S.).
Prévost Georges		Biologie végétale (C. P. E. M.).
Favard P.		Biologie animale (C. P. E. M.).
Mme Charnaux-Cotton	T	Évolution des êtres organisés.
Mlle Ficini		Chimie (C. P. E. M.).
Lequeux		Astronomie.
Cohen-Tannoudji		Physique atomique
Tavernier		Physique (C. P. E. M.).
Durand M.		Biologie animale (S. P. C. N.).
Pascaud		Physiologie.
Mme Petit		Biologie animale (C. P. E. N.).
Cagniac		Physique (agrégation).
Falk-Vairant		Physique nucléaire.
Krasner	T	Mathématiques.
Benzecri	T	Statistiques.
Vinh mau		Physique (M. G. P.).
Duquesnes		Physique (C. P. E. M.).
Schutzenberger		Programmation.
Tremillon		Chimie (M. P. C.).
Fayard		Chimie (M. P. C.)
Buvet		Chimie (C. P. E. M.).
Authier		Physique (M. P. C.).
Picinbono	T	Physique (C. P. E. M.)
Bonnefille		Électrotechnique.
Mme Puiseux-Dao		Biologie végétale.

Le Secrétaire Général : R. Poullain.

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

PROFESSEURS

Mangenot (G.)	T	Biologie végétale.
Jacquinot (P.)	T	Optique.
Guinier (A.)	T	Électricité et physique des solides.
Grivet (P.)	T	Électronique.
Blanc-Lapierre (A.)	T	Accélérateur linéaire.
L'Héritier (P.)	T	Génétique des virus.
Lemée (G.)	T	Écologie végétale.
Moyse (A.)	T	Physiologie végétale.
Dodé (M.)	T	Chimie thermodynamique.
Deny (J.)	T	Mathématiques.
Rivière (A.)	T	Géologie générale et sédimentologie.
Michel (A.)	T	Chimie minérale.
May (R.)	T	Anatomie comparée.
Delange (H.)	T	Mathématiques.
Chapelle (J.)	T	Physique expérimentale.
Lacombe (P.)	T	Métallurgie.
Benoit (P.)	T	Physiologie générale.
Guinochet (J.)	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Néron (A.)	T	Mathématiques.
Nozeran (R.)	T	Botanique approfondie.
Castaing (R.)	T	Thermodynamique.
Ellenberger (F.)	T	Géologie structurale.
Lederer (E.)	T	Chimie biologique.
Rizet (J.)	T	Génétique.
Lender (T.)	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
Poitou (G.)	T	Mathématiques.
Fréon (P.)	T	Chimie organique.
Tonnelat (J.)	T	Biologie physico-chimique.
Brunn Jan.	T	Géologie historique.
Jean (M.)	T	Physique nucléaire.
Bergerard (J.)	T	Zoologie.
Roger (J.)	T	Paléontologie.
Lefort (M.)	T	Chimie nucléaire.
Lagarrigue (A.)	T	Physique des hautes énergies.
Jullien (J.)	T	Chimie structurale organique.
Arnulf (A.)	T	Optique.
Rouault (M.)	T	Diffraction électronique.
Maréchal (A.)	T	Optique théorique et appliquée.
Mazet (R.)	T	Mécanique générale.
David (S.)	T	Chimie agrégation.
Guérin (H.)	T	Chimie des gaz et des combustibles.
Lesieur (L.)	T	Mathématiques (M. P. C.) et algèbre.
Kourganoff	T	Astronomie.
Arnoult (P.)	T	Physique électronique.
Kahane (J.-P.)	T	Mathématiques.
Brochard (J.)	T	Physique propédeutique.
Mme Roizen	T	Physique (C. P. E. M.).
Bertein (F.)	T	Électronique.
Malgrange (B.)	T	Mathématiques.
Corabœuf (E.)	T	Physiologie animale.
Friedel (J.)	T	Physique des solides.
Chevaugeon (J.)	T	Cryptogamie.
Meyer (P.)	T	Physique théorique et atomique.
Lehmann (P.)	T	Accélérateur linéaire.
Chabbal (R.)	T	Physique propédeutique.
Delcroix (J.-M.)	T	Physique des plasmas.
Cerf (J.)	T	Mathématiques.
D'Espagnat (B.)	T	Physique théorique.
Schaeffer (P.)	T	Microbiologie.
De Gennes (P.)	T	Physique des solides.
Mme Marty (N.)		Physique propédeutique.
Gourdin (M.)		Physique théorique.
Perez-y-Jorba		Physique propédeutique.
Gorenflot (E.)		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Riou (M.)		Physique nucléaire.
Brousse (R.)		Géologie (S. P. C. N.).
Lioret (C.)		Physiologie végétale.
Clauser (H.)		Chimie biologique.
Jancovici (B.)		Physique atomique.
Lurçat (J.)		Physique propédeutique.
Le Berre (J.)		Entomologie.
Lavorel (J.)		Biophysique.
Perio (P.)		Physique propédeutique.
Fetizon (M.)		Stéréochimie.
Chemla (M.)		Chimie des isotopes.
Mazières (C.)		Chimie (S. P. C. N.).
Vilkas (M.)		Chimie (C. P. E. M.).
Blandin (A.)		Physique des solides.
Brun (G.)		Génétique.
Mercouroff		Physique agrégation.
André (J.)		Microscopie électronique.
Chevallier (F.)		Physiologie animale.
Mlle Marcou		Biologie cellulaire (C. P. E. M.).
Bourdu (R.)		Physiologie végétale.
Berkaloff (A.)		Biologie animale (C. P. E. M.).
Mlle Lefort (M.)		Biologie cellulaire (C. P. E. M.).
Mme Lambert		Physique (C. P. E. M.).
Bizot (J.-C.)		Physique (M. P. C.).
Guiraud (J.-P.)		Mécanique.
Labouesse (B.)		Chimie (S. P. C. N.).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544317_0029

L'INVERSION DES PÉRIODES PROPRES DE TORSION DE LA TERRE

Florent VERREAULT
(Institut de Physique du Globe de Paris)

INTRODUCTION

Les oscillations propres du Globe ont été l'objet d'études théoriques faites par H. LAMB vers la fin du siècle dernier. Cet auteur avait reconnu en particulier que deux classes d'oscillations pouvaient se présenter, possédant l'une et l'autre un spectre discontinu de périodes propres. Dans les oscillations du premier type, appelées toroïdales ou oscillations de torsion, le mouvement des particules est horizontal et transversal. Dans celles du second type, appelées sphéroïdales, le mouvement se fait dans des plans verticaux de longitude fixe par rapport à un pôle situé à l'épicentre de l'ébranlement. En 1911, A. E. H. LOVE, après avoir repris et complété les travaux de LAMB avait pu faire une estimation de la période de la plus longue des oscillations sphéroïdales, qui est d'environ une heure. C'est H. BENIOFF, en 1954, qui fut le premier à remarquer une oscillation ayant une période de cet ordre de grandeur, dans l'enregistrement d'un séisme de 1952. Cette découverte fut l'occasion d'un renouveau d'intérêt pour l'étude dds oscillations propres, à laquelle l'ordinateur électronique avait entre temps permis de nouveaux développements.

Depuis lors, les calculs ont été faits par de nombreux auteurs afin d'obtenir les spectres théoriques des oscillations propres pour plusieurs modèles de Terre. Il s'agit là d'un problème de valeurs propres : on doit résoudre numériquement un système différentiel dans lequel interviennent les propriétés élastiques et les densités du modèle, et dont les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites que pour certaines valeurs d'un paramètre lié à la période. D'autre part l'analyse harmonique d'enregistrements d'instruments à très longue période, prélevés après les grands séismes, a permis de mettre en évidence certaines parties du spectre réel des oscillations propres de la Terre. Ce spectre est remarquablement proche des spectres théoriques qui avaient été calculés d'après les modèles de Terre courants, sans toutefois se confondre avec aucun d'eux. On a été ainsi conduit à se poser le problème spectral inverse : à partir d'un spectre des oscillations propres, récupérer les propriétés élastiques et les densités du système oscillant, c'est-à-dire de l'intérieur du Globe. L'intérêt de ce problème pour la géophysique est évident.

Ce problème d'inversion, qui s'était déjà posé dans d'autres disciplines, n'a pas de solution simple, Il est nettement plus compliqué, par exemple, que l'inversion d'une courbe de propagation des ondes de volume en vue d'en déduire les distributions des vitesses des ondes en fonction de la profondeur. Et même si l'on est parvenu, par un procédé quelconque, à construire un modèle dont le spectre se confonde avec celui de la Terre, il ne semble pas possible de conclure que ce modèle représente réellement les propriétés physiques de la Terre, car la solution n'est peut-être pas unique. Les études sur cette question de l'unicité sont encore incomplètes, et les résultats obtenus jusqu'à présent ne paraissent pas très encourageants, du moins si l'on s'en tient à un point de vue purement théorique. Cette difficulté demeure évidemment sérieuse. Il semble toutefois heureusement possible, si l'unicité fait défaut, de faire entrer dans la recherche de la solution des éléments d'information distincts de ceux que fournit le spectre, et, en levant ainsi l'indétermination, de parvenir à des solutions pratiquement satisfaisantes.

Depuis environ cinq ans, on a vu se développer diverses méthodes numériques permettant de trouver systématiquement des solutions au problème spectral inverse des oscillations propres de la Terre. Il s'agit de méthodes de perturbation et d'itération, dont le principe commun est le suivant. Soit un modèle de Terre, défini par les distributions des propriétés élastiques et de la densité en fonction de la profondeur. Les périodes propres de ce modèle ayant été obtenues numériquement en résolvant le système différentiel, on fait alors subir aux paramètres physiques du modèle des perturbations de faible amplitude, qui se traduisent par des perturbations des périodes propres. Puis on établit, soit théoriquement, soit d'une manière purement numé-

rique, des relations approximatives entre les perturbations du modèle et celles des périodes. Si l'on s'en tient au premier ordre des perturbations, ces relations prennent la forme d'un système d'équations linéaires dans lesquelles les perturbations des périodes apparaissent au second membre. L'inversion numérique de ce système permet donc en principe, en utilisant les écarts entre deux spectres légèrement différents, de retrouver les différences entre les modèles. En appliquant plusieurs fois ce procédé, on peut ainsi, par retouches successives, ajuster exactement un modèle de Terre à un spectre donné.

Les difficultés pratiques de ces calculs nous ont amené à limiter notre étude au cas plus simple des oscillations de torsion, qui peuvent nous donner des renseignements sur les distributions de la densité et de la vitesse des ondes transversales dans le manteau terrestre. Notre étude s'est alors divisée en trois parties.

Dans la première partie, nous exposerons une théorie des perturbations d'un modèle de Terre basée sur l'application du principe de Rayleigh, qui a déjà été maintes fois utilisé avec succès en géophysique dans la solution de problèmes spectraux. En faisant appel aux distributions d'énergie du système oscillant, il donne à la théorie une signification physique particulièrement nette. D'un point de vue numérique, il fournit une méthode souple et puissante pour relier, avec une précision souvent très bonne, les perturbations du modèle à celles du spectre.

Dans la deuxième partie, nous chercherons des procédés pratiques afin d'appliquer la théorie à divers cas particuliers d'inversion, en travaillant avec des modèles de Terre abstraits. Nous aurons ainsi l'occasion d'affronter la difficulté fondamentale du problème : l'extrême instabilité numérique de la solution, liée elle-même à la question obscure de son unicité.

Dans la troisième partie, qui consiste en une application à la Terre, nous ferons l'inversion des périodes de torsion obtenues par divers auteurs à la suite de deux grands séismes. Par suite du nombre restreint et de la dispersion considérable des observations, il nous a paru imprudent d'utiliser les données brutes. L'inversion portera donc sur une courbe synthétique des périodes obtenue après discussion et lissage. Guidés par les essais numériques de la deuxième partie, nous demanderons à ces données deux catégories de renseignements : vitesses dans le manteau superficiel, densités dans l'ensemble du manteau. Le gradient de la densité dans le manteau profond pourra à son tour fournir des indications sur le gradient thermique et les températures internes.

Dans cette étude, nous assimilerons la Terre à une sphère parfaitement élastique et isotrope, sans hétérogénéité latérale, dont les propriétés varient régulièrement avec la profondeur. Nous n'avons pas cru indispensable de rappeler les notions fondamentales sur les oscillations élastiques du Globe, par exemple les équations du mouvement qui servent de point de départ à la théorie de la première partie. On trouvera une excellente introduction historique et théorique à l'ensemble de la question dans l'article de R. Stoneley, *The Oscillations of the Earth*, paru en 1961 dans le volume 4 de *Physics and Chemistry of the Earth* (Pergamon Press). Pour le reste, les références que nous donnerons à la fin de chacune des trois parties fourniront les éléments de bibliographie nécessaires.

PREMIÈRE PARTIE

Théorie des perturbations d'un modèle de Terre

RÉSUMÉ. — *On étudie les propriétés générales des solutions du système différentiel qui donne le déplacement des particules dans les oscillations propres de torsion. On obtient des équations intégrales permettant d'exprimer les valeurs propres en fonction du déplacement et des distributions de rigidité, de densité et de vitesse. Des perturbations faibles de ces distributions se traduisent par des perturbations des valeurs propres, qu'on peut exprimer sous une forme commode, au premier ordre des perturbations, en fonction de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du lagrangien dans le manteau. Le problème de l'inversion de cette relation conduit à un système d'équations linéaires surabondant, dont on trouve la solution par la méthode des moindres carrés. Les difficultés de l'inversion, dans les cas où le système est singulier ou très oblique, peuvent être surmontées dans une certaine mesure en imposant à la solution des contraintes destinées à suppléer à l'insuffisance des renseignements donnés par les équations du système sur les inconnues du problème. On établit ensuite des expressions permettant d'atteindre le terme de deuxième ordre des perturbations des valeurs propres pour le mode fondamental, et on montre comment il est possible de tenir compte de ce terme dans l'inversion sans renoncer à la linéarité du système d'équations. Enfin on donne les grandes lignes d'un programme de calcul destiné à fournir les fonctions dont on a besoin pour écrire les équations linéaires du problème de l'inversion.*

ABSTRACT. — *A study is made of the general properties of solutions of the differential system relative to the displacement of particles in free torsional oscillations. Integral equations are set up giving the eigenvalues in terms of the displacement and of the distributions of rigidity, density and transverse velocity. Small perturbations of the distributions produce perturbations in the eigenvalues, which to first order can be expressed in a convenient form by using the kinetic energy, potential energy and lagrangian in the mantle. The inversion problem for this relation leads to an overdetermined system of linear equations whose solution is found by the method of least squares. Certain difficulties of the inversion, when the system is singular or strongly skew-angular, can be overcome to some extent by placing constraints upon the solution, their function being to supplement the insufficient information given by the system about the unknowns of the problem. Expressions are next obtained for the second order term of the perturbations of the eigenvalues in the fundamental mode. It is shown how one can take this term into account without destroying the linearity of the system of equations. Finally a program is outlined for the purpose of computing the functions needed for writing the linear equations of the inversion problem.*

I. Le système différentiel.

1. *Équation du mouvement.*

Les périodes propres de torsion de la Terre dépendent des distributions de rigidité et de densité à l'intérieur du manteau, qui interviennent comme coefficients dans l'équation du mouvement. Dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) désignons par u_r, u_θ, u_φ les trois composantes du déplacement élastique. La dilatation étant nulle pour les oscillations de torsion, on peut, en suivant Z. Alterman, H. Jarosch et C. L. Pekeris [1959], substituer dans les équations générales du mouvement écrites en coordonnées sphériques des expressions de la forme :

$$u_r = 0,$$

$$u_\theta = \frac{\mathrm{U}(r)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \mathrm{S}_n \, e^{i\omega t},$$

$$u_\varphi = -\,\mathrm{U}(r) \frac{\partial}{\partial\theta} \mathrm{S}_n \, e^{i\omega t},$$

où ω est la pulsation des oscillations et $\mathrm{S}_n(\theta, \varphi)$ une harmonique sphérique d'ordre n. On trouve

alors pour U(r), facteur radial du déplacement, l'équation différentielle suivante :

$$(1)\quad \mu\left(\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}\right)+\frac{d\mu}{dr}\left(\frac{dU}{dr}-\frac{U}{r}\right)+\left(\omega^2\rho-\frac{n(n+1)\mu}{r^2}\right)U=0,$$

où $\mu(r)$ est la rigidité et $\rho(r)$ la densité dans le manteau. L'annulation de la tension au niveau du noyau liquide, de rayon b, et à la surface libre de la Terre, de rayon a, impose les conditions aux limites :

$$\mu\left(\frac{dU}{dr}-\frac{U}{r}\right)=0 \text{ quand } r=a \text{ et } r=b.$$

La transformation $U=ry$ permet d'écrire le système différentiel sous la forme plus simple que N. Jobert [1960] utilise (avec une notation un peu différente) pour la recherche des valeurs propres :

$$(2)\quad v'+\left(pg-\frac{R}{r^2}f\right)y=0,\qquad v(a)=v(b)=0$$

où

$$v=fy',\quad f=\mu r^4,\quad g=\rho r^4,\quad p=\omega^2,\quad R=(n+2)(n-1).$$

En posant $\zeta=v/y$, on peut finalement ramener l'équation à une équation de Riccati non linéaire :

$$(3)\quad \zeta'+\frac{\zeta^2}{f}+\left(pg-\frac{R}{r^2}f\right)=0,\qquad \zeta(a)=\zeta(b)=0.$$

L'équation est maintenant du premier ordre. Si l'on s'en servait pour la recherche des valeurs propres, elle présenterait par conséquent l'avantage de réduire de moitié le nombre des opérations requises dans l'intégration numérique du système différentiel.

2. *Propriétés des solutions.*

Le système (2) appartient à la classe des systèmes de Sturm-Liouville, dont les propriétés sont étudiées dans les traités sur les équations différentielles, par exemple celui de E. L. Ince [1957]. Sans résoudre explicitement le système (2), on peut ainsi tirer certaines conclusions sur les propriétés de ses solutions.

Considérons R comme un paramètre indépendant. Pour chaque valeur de R, le système possède une infinité de solutions appelées fonctions propres, et à chacune d'elles correspond une valeur de p appelée valeur propre. Les valeurs propres sont des nombres réels et positifs formant une suite infinie

$$p_0<p_1<p_2\ \ldots\ p_{m-1}<p_m\ \ldots$$

La fonction propre y_m à laquelle correspond p_m prend la valeur zéro exactement m fois dans l'intervalle $b<r<a$. En particulier, la fonction y_0 qui définit le mode fondamental pour chaque valeur de R n'a pas de zéro dans l'intervalle considéré.

Les fonctions propres y_m d'une même valeur de R sont orthogonales avec les poids g :

$$(4)\quad \int_b^a g y_m y_k\,dr=0 \text{ si } m\neq k.$$

Une fonction quelconque F(r) définie dans l'intervalle (a, b) peut être développée en une série infinie de fonctions propres $y_m(r)$:

$$(5)\quad F(r)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m y_m(r)$$

dont les coefficients a_m sont obtenus par une intégration :

$$(6)\quad a_m\int_b^a g y_m^2\,dr=\int_b^a gF y_m\,dr,$$

et ce développement est convergent ou divergent en un point suivant que le développement de F(r) en série de cosinus est lui-même convergent ou divergent en ce point.

Il sera souvent nécessaire de considérer des solutions de l'équation différentielle qui ne sont pas des fonctions propres. Supposons par exemple que l'on fasse une intégration numérique du système (2) à partir du noyau, en utilisant, à la place de la valeur propre inconnue p, une valeur d'essai λ. La solution que l'on obtient satisfait le système :

$$(7)\quad v'+\left(\lambda g-\frac{R}{r^2}f\right)y=0,\qquad v(b)=0$$

alors que la condition $v(a)=0$ n'est satisfaite que si $\lambda=p$. Multiplions (7) par une fonction arbitraire η et calculons une intégrale indéfinie dans l'intervalle (b, r). Après avoir intégré $v'\eta$ par parties et utilisé la condition à la limite, on trouve :

$$(8)\quad \lambda\int_b^r gy\eta\,dr=-v(r)\,\eta(r)+\int_b^r f\left(y'\eta'+\frac{R}{r^2}y\eta\right)dr.$$

Cette équation intégrale exprime une propriété générale des solutions de (7), dont on peut déduire une série de cas particuliers importants.

Par exemple, si $\eta = y$, on obtient :

$$(9)\quad \lambda \int_b^r gy^2\,dr = -\,v(r)\,y(r) + \int_b^r f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}\,y^2\right)dr.$$

Si $\lambda = p$, c'est-à-dire si y est une fonction propre, on aura :

$$(10)\quad p \int_b^r gy\eta\,dr = -\,v(r)\,\eta(r) + \int_b^r f\left(y'\eta' + \frac{R}{r^2}\,y\eta\right)dr.$$

Si $\lambda = p$ et $\eta = y$, on obtient :

$$(11)\quad p \int_b^r gy^2\,dr = -\,v(r)\,y(r) + \int_b^r f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}\,y^2\right)dr.$$

Si la limite supérieure d'intégration est $r = a$, les équations (9), (10) et (11) deviennent respectivement :

$$(12)\quad \lambda \int_b^a gy^2\,dr = -\,v(a)\,y(a) + \int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}\,y^2\right)dr.$$

$$(13)\quad p \int_b^a gy\eta\,dr = \int_b^a f\left(y'\eta' + \frac{R}{r^2}\,y\eta\right)dr,$$

$$(14)\quad p \int_b^a gy^2\,dr = \int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}\,y^2\right)dr.$$

Les expressions (8) à (14) permettent de passer d'une intégrale contenant f à une intégrale contenant g.

Écrivons (14) sous la forme d'un quotient d'intégrales,

$$(15)\qquad p = \frac{\displaystyle\int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}\,y^2\right)dr}{\displaystyle\int_b^a gy^2\,dr},$$

et évaluons une quantité t déduite de l'expression (15) en remplaçant y par $y + \eta$, où η est une fonction arbitraire de faible amplitude :

$$(16)\quad t = \frac{\displaystyle\int_b^a \left\{\left(y' + \eta'\right)^2 + \frac{R}{r^2}\left(y + \eta\right)^2\right\}dr}{\displaystyle\int_b^a g(y + \eta)^2\,dr}.$$

En développant les carrés, et en utilisant (13) et (14) pour éliminer les intégrales contenant f, on trouve :

$$(17)\quad t = \frac{p\displaystyle\int_b^a gy^2\,dr + 2p\int_b^a gy\eta dr + O(\eta^2)}{\displaystyle\int_b^a gy^2\,dr + 2\int_b^a gy\eta dr + O(\eta^2)},$$

d'où :

$$(18)\qquad t = p + O(\eta^2).$$

L'effet de la substitution d'une fonction propre approchée $y + \eta$ à la fonction propre exacte y est donc nul au premier ordre. Dans ce sens le quotient d'intégrales (15) est dit stationnaire.

Ce résultat a été souvent utilisé, sous le nom de principe de Rayleigh, pour calculer les valeurs propres à partir d'une formule approchée de déplacement.

D. L. Anderson [1964], ainsi que H. Takeuchi, J. Dorman et M. Saito [1964] utilisent cette propriété pour calculer les dérivées partielles des vitesses de phase par rapport aux paramètres physiques des couches à l'intérieur du globe.

3. *Le système associé.*

L'intégration numérique du système (7) avec une valeur d'essai ne permettant pas en général de satisfaire la condition $v(a) = 0$, on doit recommencer l'intégration avec une nouvelle valeur de λ. Pour la choisir N. Jobert [1960] introduit le système différentiel non homogène suivant, que nous appelerons le système associé :

$$(19)\qquad \begin{aligned} w' + \left(\lambda g - \frac{R}{r^2}f\right)z + gy &= 0 \\ z(b) &= 0 \\ w(b) &= 0 \end{aligned}$$

où $\qquad w = \partial v/\partial\lambda \quad \text{et} \quad z = \partial y/\partial\lambda.$

Le système (19) est déduit de (7) en différentiant par rapport à λ. On intègre en même temps (7) et (19) jusqu'à $r = a$. La valeur d'essai est alors corrigée d'une quantité $\gamma = -\,v(a)/w(a)$ et l'intégration est recommencée. On peut écrire en effet que :

$$(20)\quad v(a, p) = v(a, \lambda) + (p - \lambda)\,w(a, \lambda) + O(p - \lambda)^2$$

et comme $v(a, p)$ doit être nul, on obtient :

$$(21)\qquad p = \lambda + \gamma + O(p - \lambda)^2.$$

Le système associé fournit ainsi une méthode systématique de calculer des approximations successives de la valeur propre p. Mais si la valeur d'essai initiale n'était pas suffisamment proche de p, la suite des approximations pourrait diverger, ou converger lentement, ou converger vers une autre valeur de p. On peut réduire ces inconvénients en recourant à l'intégrale stationnaire (15). Écrivons d'abord (12) sous la forme

$$(22)\quad \frac{\int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr}{\int_b^a gy^2\,dr} = \lambda + \frac{v(a)\,y(a)}{\int_b^a gy^2\,dr},$$

où y est la solution du système (7) intégré avec la valeur d'essai λ. Cette solution diffère de la fonction propre par des quantités qui sont de l'ordre de $p - \lambda$. Le premier membre de (22) diffère donc de p par une quantité qui est de l'ordre de $(p - \lambda)^2$. On peut écrire par conséquent :

$$(23)\quad p = \lambda + \frac{v(a)\,y(a)}{\int_b^a gy^2\,dr} + O(p - \lambda)^2,$$

et la correction de la valeur d'essai est donnée par le deuxième terme à droite. Cette méthode fournit généralement des approximations plus convergentes que (21) et n'exige pas que l'on ait résolu le système associé.

Le système (19) peut cependant être utilisé d'une manière différente, qui, en permettant d'obtenir la valeur propre avec grande précision en une seule intégration, conduit à supprimer les approximations successives. On écrit la fonction propre $y(r, p)$ sous la forme :

$$(24)\quad y(r, p) = y(r, \lambda) + (p - \lambda)\,z + O(p - \lambda)^2,$$

ou encore, puisque $p - \lambda = \gamma + O(p - \lambda)^2$:

$$(25)\quad y(r, p) = y(r, \lambda) + \gamma z + O(p - \lambda)^2.$$

Ainsi la fonction propre est disponible en chaque point, avec une erreur de deuxième ordre seulement, en corrigeant la solution du système (7) d'une quantité γz. Si on substituait cette solution corrigée dans l'intégrale stationnaire (15), on obtiendrait donc la valeur propre avec une erreur qui ne serait que du *quatrième* ordre en $p - \lambda$. On aurait par conséquent :

$$(26)\quad p = \frac{\int_b^a f\left\{\left(y' + \gamma z'\right)^2 + \frac{R}{r^2}(y + \gamma z)^2\right\}dr}{\int_b^a g(y + \gamma z)^2\,dr} + O(p - \lambda)^4,$$

où y et z seraient fournis par l'intégration des systèmes (7) et (19) avec la valeur d'essai λ, et $\gamma = -v(a)/w(a)$.

Toutefois il n'est pas nécessaire, pour évaluer (26), de calculer réellement les intégrales définies qui y sont indiquées. Pour le montrer, il faut d'abord établir certaines propriétés du système associé.

Dans (8), en remplaçant la fonction arbitraire η par z, on obtient :

$$(27)\quad \lambda \int_b^r gyzdr = -v(r)\,z(r) + \int_b^r f\left(y'z' + \frac{R}{r^2}yz\right)dr.$$

D'autre part, en multipliant par y l'équation différentielle (19) et en intégrant dans l'intervalle (b, r), on obtient après avoir intégré $w'y$ par parties :

$$(28)\quad \int_b^r gy^2\,dr = v(r)\,z(r) - y(r)\,w(r).$$

De même, en multipliant par z l'équation différentielle (19) et en intégrant dans l'intervalle (b, r), on obtient :

$$(29)\quad \lambda \int_b^r gz^2\,dr + \int_b^r gyzdr = -w(r)\,z(r) + \int_b^r f\left(z'^2 + \frac{R}{r^2}z^2\right)dr.$$

Les relations (12), (27), (28) et (29) permettent d'exprimer (26) en fonction des trois intégrales contenant g,

$$A = \int_b^a gy^2\,dr,\quad B = \int_b^a gyzdr,\quad C = \int_b^a gz^2\,dr,$$

qui doivent avoir été calculées pas à pas pendant l'intégration des systèmes différentiels (7) et (19). On obtient le résultat final suivant :

$$(30)\quad p = \lambda + \gamma\cdot\frac{A + B\gamma}{A + 2B\gamma + C\gamma^2} + O(p - \lambda)^4.$$

Des essais avec le programme TOROS que nous décrirons plus loin montrent qu'on obtient les valeurs propres avec au moins 5 chiffres significatifs quand la différence relative entre p et λ est de l'ordre de 1 %.

4. *Relations énergétiques.*

Si l'on multiplie par ydr l'équation différentielle (2) et que l'on remplace $(fy')'y$ par

$(fy'y)' - fy'^2$, on trouve en transposant les termes :

$$(31)\quad pgy^2\,dr - f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr = -(fy'y)'\,dr.$$

Or, le premier terme représente à un facteur près l'énergie cinétique dT, et le second l'énergie potentielle dV, comprises entre les rayons r et $r + dr$. Le terme $-(fy'y)'$ doit donc représenter la différence dT — dV des deux énergies, c'est-à-dire le lagrangien dL de la couche infinitésimale d'épaisseur dr. On a par conséquent :

$$(32)\quad d\mathrm{T} - d\mathrm{V} = d\mathrm{L},$$

$$(33)\quad d\mathrm{T} = pgy^2\,dr,$$

$$(34)\quad d\mathrm{V} = f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr,$$

$$(35)\quad d\mathrm{L} = -(fy'y)'\,dr.$$

En intégrant (33), (34) et (35) entre b et r, et en utilisant (28), on obtient :

$$(36)\quad \mathrm{T}(r) = p\int_b^r gy^2\,dr = p(vz - yw),$$

$$(37)\quad \mathrm{V}(r) = \int_b^r f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr = p(vz - yw) + vy$$

$$(38)\quad \mathrm{L}(r) = -vy.$$

Pour l'ensemble du manteau, les énergies sont donc :

$$(39)\quad \mathrm{T}(a) = p\int_b^a gy^2\,dr = -py(a)\,w(a),$$

$$(40)\quad \mathrm{V}(a) = \int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr = -py(a)\,w(a),$$

$$(41)\quad \mathrm{L}(a) = 0.$$

L'équation (14) est équivalente à $\mathrm{T}(a) = \mathrm{V}(a)$. Si 2 W est l'énergie totale du manteau, on peut écrire :

$$(42)\quad \mathrm{W} = \mathrm{T}(a) = \mathrm{V}(a).$$

II. Perturbations au premier ordre.

1. *Calcul des perturbations des valeurs propres.*

Si l'on s'est donné les distributions de densité $\rho(r)$ et de rigidité $\mu(r)$, ou bien les distributions de densité $\rho(r)$ et de vitesse $\beta(r)$, dans le manteau terrestre, la résolution du système différentiel (2) permet de connaître les fonctions propres y et les valeurs propres p associées aux oscillations de torsion. On suppose ce travail accompli pour un modèle de Terre, que nous appellerons le modèle de référence. On considère ensuite un second modèle, peu différent du premier, dont les distributions de densité, de rigidité et de vitesse sont respectivement $\rho + \delta\rho$, $\mu + \delta\mu$, $\beta + \delta\beta$. Les valeurs propres sont $p + \delta p$ et ses fonctions propres $y + \eta$. On raisonnera comme si les variations $\delta\rho$, $\delta\mu$ et $\delta\beta$ étaient des perturbations du modèle de référence, entraînant des perturbations δp de ses valeurs propres et des perturbations η de ses fonctions propres, et on cherchera à exprimer les perturbations les unes en fonction des autres. On négligera pour commencer toutes les quantités du second ordre.

D'après (15) la valeur propre p du modèle de référence est :

$$p = \frac{\int_b^a f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr}{\int_b^a gy^2\,dr}.$$

On en déduit celle du modèle perturbé :

$$(43)\quad p + \delta p = \frac{\int_b^a (f+\delta f)\left\{(y'+\eta')^2 + \frac{R}{r^2}(y+\eta)^2\right\}dr}{\int_b^a (g+\delta g)(y+\eta)^2\,dr},$$

où $\delta f = r^4\,\delta\mu$ et $\delta g = r^4\,\delta\rho$. La stationarité de ce quotient d'intégrales permet d'écrire :

$$(44)\quad p + \delta p = \frac{\int_b^a (f+\delta f)\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr}{\int_b^a (g+\delta g)\,y^2\,dr} + \mathrm{O}(\eta^2),$$

et le terme de deuxième ordre est négligeable. On multiplie les deux membres de (44) par le dénominateur. Le terme contenant $\delta p\,\delta g$ est négligeable, et les termes d'ordre zéro s'annulent l'un l'autre. On trouve donc :

$$(45)\quad \delta p\int_b^a gy^2\,dr = \int_b^a \delta f\left(y'^2 + \frac{R}{r^2}y^2\right)dr - p\int_b^a \delta g y^2\,dr,$$

qui est une relation entre les perturbations des valeurs propres et celles du modèle.

Il est préférable en général de travailler avec les variations relatives $\frac{\delta\rho}{\rho}$, $\frac{\delta\mu}{\mu}$, $\frac{\delta\beta}{\beta}$, etc...

Comme $\mu = \beta^2 \rho$, on aura toujours, si $\delta\beta$ est suffisamment petit :

$$\frac{\delta\mu}{\mu} = 2\frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{46}$$

D'autre part

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta\mu}{\mu}, \tag{47}$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta\rho}{\rho}. \tag{48}$$

L'équation (45) devient alors :

$$\frac{\delta p}{p}\int_b^a \rho g y^2\, dr = \int_b^a \frac{\delta\mu}{\mu} f\left(y'^2 + \frac{\mathrm{R}}{r^2}y^2\right) dr - p\int_b^a \frac{\delta\rho}{\rho} g y^2\, dr. \tag{49}$$

On peut écrire cette équation, en faisant appel aux relations énergétiques (32) à (42), sous la forme suivante :

$$\mathrm{W}\frac{\delta p}{p} = \int_b^a \frac{\delta\mu}{\mu}\, d\mathrm{V} - \int_b^a \frac{\delta\rho}{\rho}\, d\mathrm{T}, \tag{50}$$

ou encore, à cause de (32) et (46) :

$$\mathrm{W}\frac{\delta p}{p} = 2\int_b^a \frac{\delta\beta}{\beta}\, d\mathrm{V} - \int_b^a \frac{\delta\rho}{\rho}\, d\mathrm{L}. \tag{51}$$

Les équations (50) et (51) signifient que les perturbations des valeurs propres sont obtenues en pondérant les perturbations du modèle avec les valeurs des énergies.

On peut aussi exprimer $\delta p/p$ en fonction des *gradients* des perturbations du modèle, en intégrant par parties chacun des deux termes à droite de (51). Comme $\mathrm{V}(b)$ et $\mathrm{L}(b)$ sont nuls, ainsi que $\mathrm{L}(a)$, et que $\mathrm{V}(a) = \mathrm{W}$, on obtient :

$$\mathrm{W}\frac{\delta p}{p} = 2\mathrm{W}\left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| r = a - 2\int_b^a \left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)' \mathrm{V}\, dr + \int_b^a \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)' \mathrm{L}\, dr. \tag{52}$$

Cette expression suppose que les fonctions $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$ sont différentiables partout, mais on peut avec de légères modifications l'adapter à des variations plus générales.

2. *Dispersion pour le mode fondamental.*

Les oscillations propres de torsion peuvent être considérées comme des ondes stationnaires apparaissant par interférence d'ondes progressives de Love guidées par la surface sphérique de la Terre. Soit ω la pulsation de ces ondes, k le nombre d'ondes, c la vitesse de phase et u la vitesse de groupe. Ces grandeurs sont liées par les relations :

$$c = \frac{\omega}{k}, \tag{53}$$

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \tag{54}$$

Les grandeurs correspondantes pour les oscillations de torsion peuvent être obtenues en utilisant l'expression

$$ka = n + 1/2, \tag{55}$$

que l'on établit par un passage à la limite quand la longueur d'onde est faible par rapport au rayon terrestre. Pour la dispersion du mode fondamental, nous utiliserons (55) sous une forme un peu différente

$$ka = \sqrt{\mathrm{R}}, \tag{56}$$

qui donne le même résultat quand n est suffisamment grand. On déduit aisément de (56), puisque $p = \omega^2$ et $\mathrm{R} = (n + 2)(n - 1)$, que

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{p}{\mathrm{R}}, \tag{57}$$

$$\frac{uc}{a^2} = \frac{dp}{d\mathrm{R}}, \tag{58}$$

dans le cas des oscillations de torsion.

On peut évaluer $dp/d\mathrm{R}$ en raisonnant comme si R pouvait varier d'une manière continue. Si R subit un petit accroissement $\delta\mathrm{R}$, la valeur propre devient $p + \delta p$ et la fonction propre $y + \eta$.

On a ainsi :

$$p + \delta p = \frac{\int_b^a f\left\{(y' + \eta')^2 + \frac{\mathrm{R} + \delta\mathrm{R}}{r^2}(y + \eta)^2\right\} dr}{\int_b^a g(y + \eta)^2\, dr} \tag{59}$$

ou encore, en vertu de la stationarité du quotient des intégrales :

$$p + \delta p = \frac{\int_b^a f\left(y'^2 + \frac{\mathrm{R} + \delta\mathrm{R}}{r^2}y^2\right) dr}{\int_b^a g y^2\, dr} + \mathrm{O}(\eta^2). \tag{60}$$

En comparant avec (15), on trouve :

$$\delta p = \frac{\delta \mathrm{R} \int_b^a \frac{f}{r^2} y^2\, dr}{\int_b^a g y^2\, dr} + \mathrm{O}(\eta^2), \tag{61}$$

et à la limite quand $\delta \mathrm{R} \to 0$

$$\frac{dp}{d\mathrm{R}} = \frac{\int_b^a \frac{f}{r^2} y^2\, dr}{\int_b^a g y^2\, dr}. \tag{62}$$

Ce résultat est exact, car le terme de deuxième ordre est nul à la limite.

D'autre part p/R est donné par (15).

$$\frac{p}{\mathrm{R}} = \frac{\int_b^a f \left(\frac{y'^2}{\mathrm{R}} + \frac{y^2}{r^2} \right) dr}{\int_b^a g y^2\, dr}. \tag{63}$$

Les expressions (62) et (63), compte tenu de (57) et (58), permettent de calculer c et u à partir du déplacement. La vitesse de groupe est obtenue sans qu'on ait à différentier réellement la vitesse de phase et par conséquent sans perte de précision. Une méthode analogue avait été proposée par E. Meissner [1927] pour calculer la vitesse de groupe des ondes de Love dans le plan.

En soustrayant (63) de (62) et en divisant par R, on obtient :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \left(\frac{dp}{d\mathrm{R}} - \frac{p}{\mathrm{R}} \right) = \frac{d}{d\mathrm{R}} \frac{p}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2} \frac{\int_b^a f y'^2\, dr}{\int_b^a g y^2\, dr}, \tag{64}$$

de sorte que p/R diminue quand R augmente. Remarquons enfin que l'on a toujours, si $\mathrm{R} \neq 0$:

$$\frac{dp}{d\mathrm{R}} < \frac{p}{\mathrm{R}}. \tag{65}$$

3. *Cas-limite $n = 1$.*

Bien qu'il n'existe pas d'oscillation propre dans le mode fondamental pour $n < 2$, on voit par inspection que le système (2) admet formellement pour $n = 1$, $\mathrm{R} = 0$ le mode dégénéré

$$p = 0, \quad y = 1, \quad fy' = 0, \tag{66}$$

dans lequel la fréquence est nulle, la tension est nulle, le déplacement se réduit à une rotation rigide autour de l'axe polaire. p/R et $dp/d\mathrm{R}$ ont une limite commune Q qui dépend seulement des distributions de rigidité et de densité :

$$\mathrm{Q} = \frac{\int_b^a \frac{f}{r^2} dr}{\int_b^a g\, dr}. \tag{67}$$

Ce cas-limite permet de voir les implications de la formule $ak = \sqrt{\mathrm{R}}$ que nous avons utilisée au lieu de $ak = n + 1/2$. Supposons que $ak = \sqrt{\mathrm{R} + s}$, s étant une constante que nous chercherons à choisir en considérant le comportement de la dispersion aux très grandes périodes.

La formule $ak = n + 1/2$, valable pour les valeurs élevées de n, correspond au choix $s = 9/4$, alors que $ak = \sqrt{\mathrm{R}}$ correspond à $s = 0$. Au lieu de (57) et (58) on aurait, avec $ak = \sqrt{\mathrm{R} + s}$:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{p}{\mathrm{R} + s},$$

$$\frac{uc}{a^2} = \frac{dp}{d\mathrm{R}}.$$

Supposons $s \neq 0$. Quand $\mathrm{R} \to 0$, c'est-à-dire aux très grandes périodes, $p \to 0$, $dp/d\mathrm{R} \to \mathrm{Q}$ qui est une limite finie, et par conséquent $c \to 0$ et $u \to \infty$. L'extension de la formule $ak = n + 1/2$ aux faibles valeurs de n fournit des valeurs *décroissantes* de la vitesse de phase. On attendrait plutôt des valeurs croissantes, puisque les oscillations très longues échantillonnent davantage les couches profondes du manteau où la vitesse β est la plus grande.

Supposons $s = 0$. Quand $\mathrm{R} \to 0$, p/R et $dp/d\mathrm{R} \to \mathrm{Q}$, u et c tendent vers une limite commune $a\sqrt{\mathrm{Q}}$, la vitesse de phase augmente uniformément, l'apparente dispersion anormale ne se produit pas, u reste toujours inférieure à c. Ce comportement régulier de la dispersion, analogue à celle des ondes de surface dans le plan, semblerait logiquement plus acceptable.

III. L'inversion des perturbations.

1. *Linéarisation du problème.*

Les perturbations des valeurs propres sont exprimées en fonction de celles du modèle par une des équations (50), (51) ou (52). Le problème qu'on se pose maintenant consiste à inverser la relation : on suppose connues les perturbations $\delta p/p$ de M valeurs propres et on écrit un système de M équations dans lesquelles les perturbations du modèle

figurent comme inconnues. Pour les calculer, on cherche à les représenter par des fonctions dépendant d'un certain nombre de paramètres qu'on aura à déterminer en résolvant le système. Bien qu'en principe la forme mathématique de ces fonctions n'importe pas, on la choisira toujours, en pratique, de manière à avoir un système d'équations linéaires, et le nombre d'inconnues devra rester assez petit.

Supposons qu'on travaille avec les vitesses et les densités (51) plutôt qu'avec les rigidités (50). L'idée la plus simple est de diviser le manteau en un certain nombre K de couches, et de représenter chacune des deux variations $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$ par une série de constantes formant une fonction en escalier. Soit $j = 1,2...$ K l'indice des couches et $i = 1,2...$ M celui des équations. L'équation de rang i, par suite de (51), est de la forme :

$$(68)\quad \sum_{j=1}^{K} \left[2V_{ij} \left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)_j - L_{ij} \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_j \right] = W_i \left(\frac{\delta p}{p}\right)_i$$

où V_{ij} est l'énergie potentielle et L_{ij} le lagrangien de la couche j, etc... (68) est une équation linéaire à 2 K inconnues. Le système des M équations peut en principe être résolu quand $M \geqslant 2$ K, si une solution existe et si elle est unique.

En général cependant une fonction en escalier ne permet pas de représenter une variation quelconque avec une bonne précision sans un grand nombre d'inconnues, et par conséquent, le maniement de cette méthode serait difficile et son rendement peu élevé. On peut faire beaucoup mieux en utilisant une fonction linéaire par morceaux, dont la courbe a la forme d'une ligne brisée ou d'un polygone. Le nombre de paramètres requis pour atteindre une certaine précision de l'ajustement est alors évidemment beaucoup moins grand. Les paramètres à déterminer sont dans ce cas les gradients $(\delta\beta/\beta)'$ et $(\delta\rho/\rho)'$ constants à l'intérieur de chacune des couches, et l'expression (52) permet d'écrire directement les équations linéaires qui traduisent cette représentation. Les coefficients des inconnues, pour un intervalle typique, sont les intégrales définies

$$\int_{r_1}^{r_2} V(r)\, dr, \qquad \int_{r_1}^{r_2} L(r)\, dr,$$

où r_1 et r_2 désignent les limites de l'intervalle considéré. Une inconnue supplémentaire apparaît à cause du terme intégré.

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que le découpage du manteau soit fait de manière identique pour les inconnues relatives à la vitesse et à la densité, ni que des représentations de même type soit adoptées pour les deux variations.

Lorsqu'on a écrit une équation pour les gradients d'une variation, on peut facilement la transformer en une nouvelle équation où les inconnues représentent les valeurs prises par la variation aux *sommets* du polygone : il suffit pour cela d'exprimer chaque gradient en fonction de la différence de hauteur entre deux sommets voisins, et de regrouper ensuite les termes.

2. *Solution par moindres carrés.*

Supposons que cette méthode ou une de ses variantes nous ait permis d'écrire une liste de M équations à N inconnues, que nous appellerons les équations des observations. L'équation de rang i est de la forme :

$$(69)\quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_j = \Delta_i,$$

où a_{ij} est le coefficient de l'inconnue x_j, et Δ_i est la valeur observée de $\delta p/p$ dans l'équation i. Le système linéaire entier peut être représenté par l'équation matricielle :

$$(70)\quad \mathbf{A}\vec{X} = \vec{\Delta},$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice rectangulaire de M lignes et N colonnes, $\vec{X}$ est le vecteur des inconnues et $\vec{\Delta}$ celui des observations. Le système (70) en général est surabondant et incompatible, et on est alors conduit à chercher la solution qui le satisfait le mieux possible. La méthode classique pour définir et trouver cette « meilleure » solution est la méthode des moindres carrés. Voir par exemple C. Lanczos [1957].

Soit $\vec{X}$ une solution possible de (70). Soit $\vec{\mathcal{R}}$ le vecteur des résidus par rapport à $\vec{X}$, défini par l'équation

$$(71)\quad \vec{\mathcal{R}} = \mathbf{A}\vec{X} - \vec{\Delta}.$$

Alors la meilleure solution, au sens des moindres carrés, est par définition celle qui rend minimum le carré du module de $\vec{\mathcal{R}}$. Pour la calculer, on prémultiplie (70) par la matrice transposée $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$(72)\quad \widetilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}\vec{X} = \widetilde{\mathbf{A}}\vec{\Delta}.$$

La matrice produit $\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ est une matrice carrée, le nombre d'équations est égal à celui des inconnues, et une solution unique existe toujours si le déterminant de $\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ n'est pas nul.

La méthode des moindres carrés a été introduite dans les problèmes d'inversion par J. Dorman et M. Ewing [1962].

3. *Unicité de la solution.*

Lorsqu'on est parvenu, par une méthode d'inversion, à trouver une solution satisfaisant les données d'observation, la question se pose de savoir si une autre solution, faisant intervenir par exemple un jeu d'inconnues différent, ne les aurait pas satisfaites tout aussi bien. L. Knopoff [1961] a pu démontrer qu'il existe au moins un cas où la solution n'est pas unique : en utilisant seulement une courbe de dispersion des ondes de Love (ou un spectre des oscillations propres de torsion) il n'est pas possible de déterminer d'une manière unique à la fois la densité $\rho(r)$ et la vitesse $\beta(r)$, mais une des deux distributions peut être déterminée si l'autre est supposée connue.

Le problème de l'unicité de la solution peut d'ailleurs se poser même quand on ne cherche qu'une seule des deux distributions. D'une manière générale, on peut dire que la solution n'est pas unique chaque fois que la matrice produit $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ de l'expression (72) est singulière. Mais si le système est très « oblique » sans être singulier (le déterminant de $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ est petit mais pas nul), la situation n'est guère meilleure, car dans ce cas la solution apparemment unique calculée par l'inversion de la matrice est extrêmement instable. De légers changements introduits dans les éléments de la matrice ou dans le vecteur des observations ont pour effet de modifier complètement la solution. Or, même si on peut supposer que les éléments de la matrice sont connus avec une précision illimitée, le vecteur des observations, lui, est ordinairement moins bien connu, par suite de l'incertitude des mesures et de l'absence des termes de deuxième ordre négligés dans la théorie, et par conséquent, la solution calculée peut être dépourvue de signification physique. Certains éléments de la solution, par exemple, prennent des valeurs aberrantes, 10 ou 20 fois plus grandes que les valeurs qu'on attendrait.

Toutefois ces difficultés ne sont pas telles qu'on doive entièrement renoncer à tirer des renseignements des systèmes d'équations singuliers ou obliques, car il sera souvent possible de suppléer à l'indétermination de ces systèmes en faisant appel à d'autres sources d'information. On dira dans ce cas que la solution est soumise à des contraintes. Quand ces contraintes peuvent être exprimées sous la forme d'équations linéaires dans les inconnues du problème, on peut ajouter les équations des contraintes à la liste des équations des observations et chercher par la méthode des moindres carrés la solution du système amplifié.

Admettons par exemple que le modèle de référence, au lieu d'être quelconque, constitue une sorte de synthèse de l'ensemble des résultats acquis par d'autres méthodes (telles que l'étude des ondes de volume) et que ces résultats ne sont probablement pas remis en question d'une manière radicale par les données de dispersion qu'on cherche à inverser. (D'ailleurs le principe même de la méthode des perturbations suppose que les corrections à apporter au modèle de référence doivent demeurer relativement faibles). On peut alors légitimement imposer à la solution du problème de l'inversion une ou plusieurs contraintes destinées à écarter les corrections de grande amplitude. Les équations des contraintes, dans ce cas, prennent une forme particulièrement simple :

$$x_j = 0, \quad j = 1,2 \ldots \mathrm{N}, \tag{73}$$

où x_1, x_2,... x_N sont les inconnues utilisées dans l'inversion. Ces équations ne signifient pas que la solution doit être identiquement nulle, puisqu'on doit les ajouter à la liste des équations des observations de manière à former avec elles un système plus vaste. Mais leur présence dans le système amplifié aura automatiquement pour effet de choisir, parmi les multiples solutions qui par hypothèse sont compatibles avec les observations, celle dont l'amplitude est la plus faible. Les équations (73) pourront d'ailleurs entrer dans le système avec des poids très petits, de manière à ne pas faire violence aux observations elles-mêmes.

Nous donnerons dans la deuxième partie de ce travail des résultats d'essais numériques dans lesquels des contraintes faibles, imposées à des systèmes très obliques, permettent de retrouver sans difficulté la solution attendue, et ceci même dans des cas où la solution comprend à la fois des inconnues relatives à la vitesse et à la densité.

IV. Perturbations au deuxième ordre.

1. *Minimisation de la valeur propre.*

Les expressions (16) à (18) ont montré que la substitution d'une fonction propre approchée $y + \eta$ à la fonction propre y dans l'expression exacte (15)

$$p = \frac{\int_b^a f\left(y'^2 + \frac{\mathrm{R}}{r^2} y^2\right) dr}{\int_b^a g y^2 \, dr},$$

produit une erreur qui est du deuxième ordre en η. Appelons δ cette erreur et cherchons à l'évaluer. On a :

$$(74)\quad p+\delta=\frac{\int_b^a f\left\{(y'+\eta')^2+\frac{R}{r^2}(y+\eta)^2\right\}dr}{\int_b^a g(y+\eta)^2\,dr}.$$

En multipliant les deux membres par le dénominateur du second et en retenant seulement les termes de deuxième ordre on trouve :

$$(75)\quad A.\delta=\int_b^a f\left(\eta'^2+\frac{R}{r^2}\eta^2\right)dr-p\int_b^a g\eta^2\,dr,$$

où $A=\int_b^a gy^2\,dr$. On montre ensuite que si p est une valeur propre p_0 d'un mode fondamental, δ est positif. Pour cela, on développe η en une série de fonctions propres y_m :

$$(76)\qquad \eta=\sum_{m=0}^{\infty}a_m y_m,$$

et on substitue cette série dans l'expression (75). On obtient :

$$(77)\quad A.\delta=\sum_m\sum_k a_m a_k\left\{\int_b^a f\left(y'_m y'_k+\frac{R}{r^2}y_m y_k\right)dr-p_0\int_b^a g y_m y_k\,dr\right\},$$

ou, en utilisant (13) avec les adaptations nécessaires :

$$(78)\quad A.\delta=\sum_m\sum_k a_m a_k (p_m-p_0)\int_b^a g y_m y_k\,dr.$$

Par suite de l'orthogonalité des fonctions propres, la double somme se contracte en une somme simple :

$$(79)\quad A.\delta=\sum_m a_m^2 (p_m-p_0)\int_b^a g y_m^2\,dr,$$

et cette expression est toujours positive ou nulle puisque $p_m\geqslant p_0$.

Par conséquent, en choisissant la fonction propre approchée de telle manière que le quotient d'intégrales (74) prenne la plus basse valeur possible, ce quotient ne prendra jamais une valeur inférieure à p_0 mais pourra s'en approcher autant qu'on voudra. Si la fonction approchée dépend d'un certain nombre de paramètres indéterminés, on obtiendra la meilleure approximation possible de p_0 en *minimisant* le quotient d'intégrales par rapport à chacun de ces paramètres.

Considérons par exemple l'expression (26) dont on s'est servi pour calculer les valeurs propres :

$$p=\frac{\int_b^a f\left\{(y'+\gamma z')^2+\frac{R}{r^2}(y+\gamma z)^2\right\}dr}{\int_b^a g(y+\gamma z)^2\,dr}.$$

Avec $\gamma=-v(a)/w(a)$, on obtenait (30). Mais quand il s'agit d'un mode fondamental, on peut obtenir une approximation meilleure encore, si, au lieu de donner à γ la valeur fixe $-v(a)/w(a)$, on minimise le quotient d'intégrales par rapport à γ. Des essais numériques montrent que, même avec une valeur d'essai s'écartant de 5 % de la valeur propre, celle-ci est encore obtenue avec au moins 5 chiffres significatifs.

2. *Terme de deuxième ordre des perturbations.*

Mais l'intérêt principal de la méthode de minimisation est de fournir un procédé variationnel permettant d'atteindre le terme de *deuxième* ordre des perturbations des valeurs propres des modes fondamentaux. Ce terme ne peut plus être négligé quand l'indice n de l'harmonique sphérique est élevé et que la perturbation de la rigidité dans la partie supérieure du manteau est importante. On se propose de le calculer dans le cas particulier où la rigidité seule est perturbée.

Soit p la valeur propre du modèle non perturbé et y la fonction propre correspondante. Soit $\mu+\delta\mu$ la rigidité du modèle perturbé, $y+\eta$ la fonction propre, $p+\delta p+\delta^2 p$ la valeur propre, δp désignant la perturbation au premier ordre, et $\delta^2 p$ au second ordre. On écrit comme d'habitude :

$$(80)\quad p+\delta p+\delta^2 p=\frac{\int_b^a (f+\delta f)\left\{(y'+\eta')^2+\frac{R}{r^2}(y+\eta)^2\right\}dr}{\int_b^a g(y+\eta)^2\,dr}.$$

où $f+\delta f=r^4(\mu+\delta\mu)$. Pour évaluer (80), on pose :

$$(81)\quad \begin{aligned} A&=\int_b^a gy^2\,dr,\\ B&=\int_b^a gy\eta\,dr,\\ C&=\int_b^a g\eta^2\,dr,\\ D&=\int_b^a f\left(y'^2+\frac{R}{r^2}y^2\right)dr,\\ E&=\int_b^a f\left(y'\eta'+\frac{R}{r^2}y\eta\right)dr,\\ F&=\int_b^a f\left(\eta'^2+\frac{R}{r^2}\eta^2\right)dr,\\ G&=\int_b^a \delta f\left(y'^2+\frac{R}{r^2}y^2\right)dr,\\ H&=\int_b^a \delta f\left(y'\eta'+\frac{R}{r^2}y\eta\right)dr. \end{aligned}$$

Les expressions (13), (14) et (49) fournissent trois relations entre ces quantités :

$$pA = D, \tag{82}$$

$$pB = E, \tag{83}$$

$$\delta p.A = G. \tag{84}$$

L'expression (80) devient :

$$p + \delta p + \delta^2 p = \frac{D + 2E + F + G + 2H + O(\eta^3)}{A + 2B + C}, \tag{85}$$

d'où on tire la valeur de $\delta^2 p$ en utilisant (82), (83) et (84), les termes d'ordre 3 et 4 étant négligés :

$$A.\delta^2 p = F - pC + 2(H - \delta p.B). \tag{86}$$

Cette expression peut être mise sous une forme utilisable en posant :

$$\eta = \varepsilon y, \tag{87}$$

$$\sigma = \frac{\delta f}{f} - \frac{\delta p}{p}, \tag{88}$$

et en faisant intervenir les relations énergétiques (32) à (42). Après quelques transformations qui ne présentent pas de difficultés (sauf peut-être une intégration par parties), on obtient finalement le résultat suivant :

$$A.\delta^2 p = \int_b^a \varepsilon'^2 f y^2 \, dr + 2\int_b^a \varepsilon\sigma dV - 2\int_b^a \varepsilon'\sigma L \, dr, \tag{89}$$

où V est l'énergie potentielle et L est le lagrangien.

On aurait pu tenir compte dans ce calcul d'une perturbation de la densité, mais son rôle est très peu important quand n est grand, et c'est ce cas qui nous intéresse.

En général l'expression (89) ne permettrait de calculer le terme de second ordre que si on connaissait ε, qui a trait à la perturbation de la fonction propre. Mais supposons qu'il s'agisse d'un mode fondamental. On peut alors surmonter la difficulté par la méthode variationnelle ; on remplace ε par une fonction dépendant de paramètres indéterminés, et on minimise l'expression (89) par rapport à chacun de ces paramètres. Comme n est grand, on peut négliger entièrement la contribution du manteau profond qui n'est pas intéressé par la vibration, et prendre $\varepsilon = 0$ à partir d'une profondeur égale à la demi-longueur d'onde par exemple. Des essais numériques montrent qu'en représentant ε dans le manteau supérieur par une fonction en polygone à 2 ou 3 paramètres, on arrive à calculer $\delta^2 p$ à 5 % près environ. Il est alors possible d'écrire un algorithme numérique donnant directement la valeur minima de $\delta^2 p$ en fonction des valeurs prises par σ, β, L, etc... en quelques points du manteau supérieur.

3. *Terme de deuxième ordre dans l'inversion.*

La possibilité de calculer le terme de deuxième ordre va nous permettre d'en tenir compte dans l'inversion, sans devoir renoncer pour autant à la linéarité du système des équations que l'on aura à résoudre.

Appelons p' la valeur propre d'un modèle perturbé et p celle du modèle de référence. En incluant un terme de deuxième ordre, on a :

$$p' = p + \delta p + \delta^2 p. \tag{90}$$

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{p' - p}{p} - \frac{\delta^2 p}{p}. \tag{91}$$

Comme dans la théorie de premier ordre donnée plus haut , supposons que l'on ait observé M valeurs propres p' et qu'on ait par conséquent à résoudre un système de M équations à N inconnues. Soit Δ_i l'écart relatif $(p' - p)/p$ entre la valeur propre observée et celle du modèle de référence, dans l'équation de rang i. Soit Γ_i le terme de deuxième ordre correspondant. L'équation de rang i est donc

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = \Delta_i - \Gamma_i, \tag{92}$$

et le système entier des M équations peut être représenté par l'équation matricielle :

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{\Delta} - \vec{\Gamma}. \tag{93}$$

Les expressions (91) et (92) sont semblables à tout point de vue à (69) et (70), sauf pour le vecteur $\vec{\Gamma}$ des termes de deuxième ordre, dont la présence transforme formellement la théorie de premier ordre donnée précédemment en une théorie de deuxième ordre.

Mais le vecteur $\vec{\Gamma}$ n'est pas connu. S'il s'agit de modes fondamentaux, on peut le calculer par la méthode variationnelle à condition de connaître déjà la perturbation de la rigidité, mais ceci suppose que le système (93) est déjà résolu. Comme $\vec{\Gamma}$ est toujours petit devant $\vec{\Delta}$, on peut provisoirement le négliger, et chercher par conséquent la solution du système $\mathbf{A}\vec{X} = \vec{\Delta}$, qui constitue une

solution approchée du problème. A partir de cette solution provisoire, on calcule ensuite le terme de deuxième ordre pour chacune des observations. Et finalement, on trouve une solution définitive tenant compte des termes de deuxième ordre. Les étapes du calcul sont donc les suivantes :

1° On résout le système $\mathbf{A}\vec{X} = \vec{\Delta}$,

2° On utilise la solution pour calculer $\vec{\Gamma}$,

3° On résout enfin le système $\mathbf{A}\vec{X} = \vec{\Delta} - \vec{\Gamma}$.

En pratique, il suffira de calculer les termes de deuxième ordre pour les équations correspondant aux valeurs élevées de n, par exemple $n > 60$. On pourra négliger la contribution de la densité et celle du manteau profond. On pourrait même se contenter de traiter quelques valeurs de n, et d'utiliser un procédé d'interpolation pour obtenir les termes non calculés. Dans le cas habituel où le système des équations est oblique et où par conséquent la solution est très sensible à tous changements introduits dans le système, on doit s'attendre à voir la solution s'améliorer considérablement dès qu'on tient compte, même d'une manière approchée, des quantités de deuxième ordre.

4. *Approximations successives.*

Une fois qu'on a obtenu une solution d'un problème d'inversion, c'est-à-dire une série de corrections à appliquer au modèle de référence, on peut bien entendu prendre le modèle corrigé comme nouveau modèle de référence et recommencer tout le calcul. Une deuxième approximation est nécessaire si on n'a pas tenu compte des quantités de deuxième ordre, par exemple dans le cas où les données contiennent une proportion non négligeable de modes supérieurs.

L'instabilité de la solution, quand le système des équations des observations est très oblique, pose le problème de la convergence des approximations successives. La méthode des moindres carrés, prise isolément, ne garantit en effet que la petitesse du résidu moyen. Mais la solution à résidu minimum peut par ailleurs être inutilisable comme point de départ d'une nouvelle approximation, si certaines inconnues mal déterminées par le système sont sorties avec des valeurs aberrantes. Pour assurer la convergence des approximations, on aura donc avantage à utiliser, ici surtout, les contraintes (73), destinées à écarter une solution qui supposerait des corrections importantes du modèle de référence. Une suite de solutions à amplitude minima demeure sans doute toujours un peu en deça de la solution non contrainte, mais ne risque pas de diverger.

V. Programme de calcul.

Un programme de calcul pour IBM 704, appelé TOROS, a été écrit afin de permettre de calculer, pour un modèle de référence donné, les valeurs propres, les fonctions propres, les fonctions relatives à l'énergie, etc..., qui sont nécessaires à la construction du système d'équations linéaires du problème de l'inversion. Bien qu'il soit destiné essentiellement à être utilisé pour les modes fondamentaux, il peut être adapté sans difficulté aux modes supérieurs.

Le manteau terrestre est divisé en un petit nombre de régions, dans chacune desquelles les deux distributions $\beta(r)$ et $\rho(r)$ sont données sous forme de polynômes du troisième degré en r. Le programme calcule en chaque point d'intégration les fonctions $g = \rho r^4$, $f = \beta^2 g$, ainsi que f/r^2. Il calcule la valeur de la quantité Q de l'expression (67).

$$Q = \frac{\int_b^a f/r^2 \, dr}{\int_b^a g \, dr},$$

qui est la limite commune, quand $R \to 0$, de p/R et dp/dR. Pour la plus basse valeur de R, qui est normalement $R = 4$, une valeur d'essai $\lambda = RQ$ est donc disponible pour l'intégration du système différentiel.

On fournit une liste de valeurs de n, allant de $n = 2$ à 1000 à des intervalles convenables.

L'intégration des systèmes différentiels (7) et (19) est faite par la méthode de Runge-Kutta à partir du noyau avec un pas fixe, mais ce pas peut être changé dans la partie supérieure du manteau quand la solution varie rapidement. Outre y, v, z et w, le programme calcule en chaque point les intégrales indéfinies :

$$\int_b^r gy^2 \, dr, \quad \int_b^r gyz \, dr, \quad \int_b^r gz^2 \, dr,$$

qu'il utilise, en fin d'intégration, pour déterminer la valeur propre p. Dans le cas d'un mode fondamental, cette détermination se fait en minimisant l'expression (26) par rapport à γ.

Après avoir déterminé p, le programme reprend à partir du noyau les valeurs de y, v, z et w, qui ont été mises en mémoire, et corrige chaque valeur de y d'une quantité $(p - \lambda)\, z$, la fonction corrigée

devant tenir lieu de fonction propre. De même v est corrigé d'une quantité $(p - \lambda)\, w$. Le programme calcule alors en chaque point les fonctions relatives à l'énergie : dV/dr, dT/dr, $V(r)$, $T(r)$, $L(r)$, ainsi que les intégrales indéfinies :

$$\int_b^r V(r)\, dr, \quad \int_b^r T(r)\, dr, \quad \int_b^r L(r)\, dr.$$

A la fin, le programme calcule p/R, dp/dR, ainsi que la période, la vitesse de phase, la vitesse de groupe et la longueur d'onde.

Les valeurs d'essai λ sont choisies par un procédé d'extrapolation qui utilise les valeurs de p et de dp/dR relatives à deux valeurs de n déjà traitées.

Le temps de calcul sur IBM 704 est de 15 secondes par valeur de n lorsqu'il y a 600 points d'intégration.

BIBLIOGRAPHIE

Alterman Z., Jarosch H. et Pekeris C. L., 1959, Oscillations of the Earth, *Proc. Roy. Soc. Astr.*, **252**, 80-95.

Anderson D. L., 1964, Universal dispersion tables, 1, Love waves across oceans and continents on a spherical Earth, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 681-726.

Dorman J. et Ewing M., 1962, Numerical inversion of seismic wave dispersion data, *Jour. Geoph. Res.*, **67**, 5227-5241.

Ince E. L., 1957, Ordinary Differential Equations, Dover.

Jobert N., 1960, Calcul de la dispersion des ondes de Love de longue période à la surface de la Terre, *Ann. Géoph.*, **16**, 393-413.

Knopoff L., 1961, Green's function for eigenvalue problems and the inversion of Love wave dispersion data, *Geophys. Jour.*, **4**, 161-173.

Lanczos C., 1957, Applied Analysis, Pitman ; pp. 156-161.

Meissner E., 1926, Elastische Oberflächen-Querwellen, Proc. 2nd Intern. Congr. Appl. Mech. Zurich, pp. 3-11.

Takeuchi H., Dorman J. et Saito M., 1964, Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to physical parameter changes within the Earth, *Journ. Geoph. Res.*, **69**, 3429-3441.

DEUXIÈME PARTIE

Techniques numériques de l'inversion

RÉSUMÉ. — *Un grand nombre d'essais numériques ont été faits en vue d'appliquer à des modèles de Terre la théorie des perturbations exposée dans un premier article. On écrit d'abord un système d'équations linéaires pour les modes fondamentaux* n = 2 *à* 400, *où les inconnues représentent les perturbations de vitesse et de densité par rapport à un modèle de référence. On calcule ensuite des solutions de ce système pour les trois cas suivants :*

1) *la vitesse est perturbée dans le manteau superficiel ;*
2) *la densité est perturbée dans l'ensemble du manteau ;*
3) *la vitesse et la densité sont perturbées à la fois.*

On cherche dans chaque cas à quelles conditions il est possible d'obtenir des solutions non seulement exactes mais encore stables. La réussite de l'inversion est conditionnée notamment par le nombre des inconnues, la pondération adoptée pour les équations du système, l'importance des divers types d'erreurs présentes. Une méthode de solution par contraintes est utilisée pour obtenir des solutions stables à partir de systèmes déficients. Une approximation de deuxième ordre suffit pour que les solutions soient exactes à 0,1 % *près. Une dernière série d'essais a pour but de déterminer quels renseignements peuvent être fournis par les seules périodes très longues* (n < 30).

ABSTRACT. — *A large number of numerical experiments were made in order to apply to Earth models the perturbation theory given in an earlier paper. A system of linear equations is first written down for the fundamental modes* n = 2 *to* 400, *in which the unknowns represent the perturbations of velocity and density with respect to a standard model. Solutions of this system are then computed for the following three cases :*

1) *the velocity is perturbed in the upper mantle ;*
2) *the density is perturbed in the whole mantle ;*
3) *the velocity and density are perturbed simultaneously.*

In each case the aim is to find under what conditions it is possible to obtain solutions which are not only correct but also stable. The success of the inversion depends in particular upon the number of unknowns, the weight distribution used for the equations of the system, and the size of the different types of errors involved in the problem. A method of solution by constraint is used to get stable solutions from underdetermined systems. A second order approximation is sufficient to obtain solutions which are correct within 0.1 %. *A final series of trials is made in order to find out what information can be obtained from very long periods only* (n < 30).

Резюме. — Было исполнено большое количество числовых проверок в виду применения теории пертурбаций, изложенной в первой статье, к моделям Земли. Сначала пишется система линейных уравнений для фундаментальных образов от $n = 2$ до 400, где неизвестные изображают пертурбации скорости и плотности по сравнению с реферативной моделью. Затем высчитываются решения этой системы для трех следующих случаев :

1) скорость нарушается в поверхностной мантии ;
2) плотность нарушается во всей мантии ;
3) вместе нарушаются скорость и плотность.

В каждом случае изыскивается для каких условий возможно получить гешения не только правильные но ещё и устойчивые. Успех инверсии особенно обусловлен числом неизвестных, принятым уравновешиванием для уравнений этой системы, значительностью разных видов присутствующих ошибок. Употребляется метод решения под принуждениями для пояучения устойчивых решений исходя из недостаточных систем. Приближение второго порядка достаточно для того чтобы решения были правильны до приближения в 0,1 %. Последняя серия проверок имеет своей целью определить какие сведения могут быть даны только одними очень длинными периодами.

I. Généralités.

1. *Objet des essais numériques.*

La théorie des perturbations d'un modèle de Terre, exposée dans la Première Partie [F. Verreault, 1965], permet en principe, en partant d'un spectre des oscillations de torsion, de calculer les corrections de la vitesse et de la densité qui doivent être appliquées à un modèle de référence pour que les périodes propres du modèle corrigé coïncident avec celles de la Terre. Si la solution obtenue est unique et suffisamment stable, les distributions de vitesse et de densité du modèle corrigé doivent à leur tour se confondre avec celles de la Terre.

Cette deuxième partie contient divers résultats d'essais d'inversion portant sur des modèles numériques. Il s'agit essentiellement de chercher des méthodes pratiques permettant de mener à bien l'inversion en se plaçant dans des conditions identiques à celles que l'on rencontrera dans l'étude physique du manteau terrestre. Cette étape est indispensable pour pouvoir appliquer la théorie avec sûreté aux périodes observées, alors que la vérification directe de la solution ne sera plus possible.

L'étude des ondes de volume a permis à divers auteurs de calculer la distribution des vitesses à l'intérieur du globe. La méthode de Wiechert-Herglotz permet, en partant d'une courbe de propagation des ondes S, par exemple, et en résolvant une équation d'Abel, de trouver la vitesse β des ondes en fonction de la distance r au centre de la Terre. Mais pour que la méthode soit applicable, il est nécessaire que

$$\frac{d\beta}{dr} < \frac{\beta}{r},$$

Cette condition serait toujours satisfaite si β ne diminuait jamais avec la profondeur. H. Jeffreys [1962], en supposant qu'il en était ainsi, a obtenu une distribution (vitesses $\beta + \delta\beta$ du Tableau 1) qui, vers 400 km de profondeur, présente une discontinuité du gradient de la vitesse correspondant à une discontinuité analogue dans la courbe de propagation des ondes vers 20° de distance épicentrale. Par contre B. Gutenberg [1953, 1959*a*, 1959*b* ; cf. aussi E. C. Bullard, 1957] frappé par l'amplitude faible des ondes émergeant à des distances épicentrales inférieures à 15° ou 20°, attribuait cette *zone d'ombre* à une décroissance des vitesses séismiques dans la partie supérieure d'une *couche à faible vitesse* allant depuis la base de la croûte jusqu'à une profondeur de l'ordre de 300 km. Le Tableau 1 donne une moyenne lissée (β) de quelques-unes des dernières solutions de Gutenberg, ainsi que la différence relative $\delta\beta/\beta$ que présentent les vitesses de Jeffreys par rapport à celles de Gutenberg. On peut considérer les écarts entre ces deux modèles comme assez caractéristiques des incertitudes que l'étude des ondes de volume laisse subsister dans cette région. Aux profondeurs plus grandes, l'incertitude est assez faible pour qu'on puisse la négliger, de sorte que les recherches sur la vitesse peuvent être limitées au manteau superficiel. Le Tableau 1 donne une moyenne lissée des distributions de Jeffreys et de Gutenberg entre 400 et 2900 km de profondeur.

La densité dans le manteau, ne pouvant être atteinte que de manière indirecte, est nettement plus incertaine. Ainsi K. E. Bullen [1959] reprend pour son modèle A les équations d'Adams et Williamson qui permettent, en partant des vitesses séismiques, de calculer la densité relative en chaque point d'une couche dans laquelle sont satisfaites les conditions suivantes :

1) la tension se réduit à une pression hydrostatique ;

2) la composition chimique est homogène ;

3) le gradient thermique est adiabatique.

Bullen admet ces trois hypothèses pour la couche B (35 à 400 km de profondeur), pour la couche D (1000 à 2900 km), ainsi que pour les trois couches E, F, G qu'il distingue dans le noyau. Dans la couche C (400 à 1000 km) il raccorde la densité à celle des couches voisines à l'aide d'un polynôme du deuxième degré de la profondeur, qui permet de donner à la distribution de la densité une allure très semblable à la distribution de la vitesse de Jeffreys. Avec des hypothèses supplémentaires sur la densité au sommet de la couche B et sur le saut de densité à l'entrée de la graine, le problème devient déterminé si l'on s'est donné la masse et le moment d'inertie de la Terre. Le modèle A de Bullen donne une représentation assez nette de la densité à l'intérieur du globe, tout en laissant subsister des incertitudes importantes, qu'il serait intéressant de pouvoir dissiper en utilisant les périodes propres de torsion. C'est pourquoi nous ferons des essais d'inversion de ces périodes en vue de trouver la densité, en prenant le modèle A comme modèle de référence et en lui comparant un modèle X construit lui aussi par Bullen [1952] à partir d'hypothèses différentes. Le Tableau 1 donne les densités ρ (modèle A) et $\rho + \delta\rho$ (modèle X), ainsi que leurs différences relatives $\delta\rho/\rho$.

TABLEAU 1

Modèles de Terre

Profondeur km	Vitesse (km/sec) β	$\beta + \delta\beta$	$\delta\beta/\beta$	Densité (g/cm³) ρ	$\rho + \delta\rho$	$\delta\rho/\rho$
0 — 20	3,450	3,450	0,00 %	2,760	2,760	0,00 %
20 — 35	3,820	3,820	0,00	2,900	2,900	0,00
35	4,626	4,360	— 5,75	3,320	3,320	0,00
40	4,606	4,367	— 5,20	3,325	3,325	0,01
100	4,433	4,448	0,34	3,380	3,386	0,16
160	4,372	4,535	3,73	3,433	3,444	0,31
220	4,408	4,628	4,99	3,485	3,501	0,45
280	4,525	4,726	4,45	3,535	3,556	0,59
340	4,707	4,830	2,61	3,583	3,609	0,73
400	4,940	4,940	0,00	3,629	3,660	0,85
400	4,940			3,629	3,660	0,85
600	5,648			4,130	4,160	0,71
800	6,121			4,483	4,515	0,72
1000	6,356			4,680	4,720	0,86
1000	6,356			4,680	4,720	0,86
1200	6,489			4,798	4,851	1,11
1400	6,614			4,913	4,980	1,36
1600	6,731			5,025	5,106	1,62
1800	6,840			5,134	5,230	1,88
2000	6,941			5,240	5,352	2,15
2200	7,034			5,342	5,471	2,42
2400	7,119			5,441	5,588	2,70
2600	7,196			5,537	5,702	2,98
2800	7,265			5,630	5,814	3,28
2800	7,265			5,630	5,814	3,28
2900	7,240			5,680	5,870	3,35

On se propose par conséquent d'utiliser les différences relatives $\delta p/p$ entre les valeurs propres correspondant à ces divers modèles pour retrouver les perturbations $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$. La perturbation de la vitesse, que l'on suppose nulle sauf dans la couche B, est représentée par une fonction continue formée de 6 segments linéaires, et les inconnues x_1, $x_2 \ldots x_6$ désignent les valeurs de $\delta\beta/\beta$ à des profondeurs de 40, 100, 160, 220, 280 et 340 km. Le premier segment est prolongé jusqu'à 35 km, où la fonction fait un saut qui la ramène à zéro. A 400 km également la fonction redevient nulle (sans faire de saut) puisque les deux distributions se rejoignent à cette profondeur. Pour la perturbation de la densité, nulle dans la croûte, on adoptera de même une fonction continue formée de 3 segments linéaires, un pour chacune des couches B, C et D. La fonction commence donc à 35 km de profondeur avec une valeur nulle, et les inconnues x_7, x_8 et x_9 désignent les valeurs de $\delta\rho/\rho$ à des profondeurs de 400, 1000 et 2900 km.

Les perturbations $\delta p/p$, $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$ seront surtout exprimées en %. Une erreur de 0,2 % dans les solutions obtenues équivaudra à une erreur d'une unité dans le troisième chiffre significatif des vitesses et des densités, qui sont de l'ordre de 5. On se fixera cette précision comme objectif dans les essais d'inversion.

Les solutions cherchées sont légèrement différentes des valeurs du Tableau 1, par suite de la forme qui leur est imposée par la représentation en ligne brisée. On doit trouver à peu près, en % :

$$x_1 = -5{,}10 \qquad x_4 = 5{,}17 \qquad x_7 = 0{,}85$$
$$x_2 = 0{,}56 \qquad x_5 = 4{,}52 \qquad x_8 = 0{,}86$$
$$x_3 = 3{,}87 \qquad x_6 = 2{,}70 \qquad x_9 = 3{,}35$$

2. *Équations des observations.*

A l'aide du programme TOROS pour IBM 704, (décrit dans la Première Partie), on a calculé les valeurs propres p, les périodes τ, les fonctions propres, l'énergie cinétique T(r), l'énergie potentielle V(r), le lagrangien L(r), ainsi que les vitesses de phase et de groupe, pour les modes fondamentaux des 3 modèles suivants :

Gutenberg — Bullen A (GA)
Jeffreys — Bullen A (JA)
Jeffreys — Bullen X (JX)

et pour un ensemble de valeurs de l'indice de l'harmonique sphérique n allant de 2 à 400. Le Tableau 2 donne les périodes pour chacun des 3 modèles. Les valeurs propres et leurs perturbations peuvent en être déduites à partir des relations suivantes :

$$p = (2\pi/\tau)^2$$

$$\frac{\delta p}{p} = \left(1 + \frac{\delta\tau}{\tau}\right)^{-2} - 1. \qquad (1)$$

L'équation I.52 (le chiffre I renvoie à la Première Partie) permet de calculer les coefficients

TABLEAU 2

PÉRIODES PROPRES DE TORSION (en sec)

n	GA	JA	JX	n	GA	JA	JX
2	2615,63	2610,26	2604,72	50	166,510	164,278	164,224
3	1693,29	1689,01	1685,73	60	141,385	139,701	139,661
4	1297,06	1293,01	1290,78	70	122,864	121,623	121,593
5	1070,35	1066,27	1064,66	80	108,652	107,769	107,746
6	921,25	917,07	915,87	90	97,406	96,816	96,798
7	814,40	810,10	809,17	100	88,292	87,942	87,927
8	733,25	728,84	728,10	110	80,761	80,607	80,595
9	669,03	664,53	663,92	120	74,436	74,444	74,433
10	616,66	612,07	611,56	130	69,052	69,193	69,184
11	572,93	568,29	567,84	140	64,418	64,665	64,658
12	535,75	531,07	530,68	150	60,388	60,722	60,716
13	503,66	498,95	498,61	160	56,855	57,257	57,252
14	475,61	470,90	470,59	170	53,734	54,188	54,183
15	450,84	446,13	445,85	180	50,958	51,452	51,447
16	428,76	424,08	423,82	190	48,473	48,995	48,991
17	408,92	404,28	404,04	200	46,239	46,778	46,775
18	390,99	386,38	386,16	210	44,218	44,768	44,764
19	374,67	370,12	369,91	220	42,835	42,935	42,932
20	359,75	355,26	355,06	230	40,709	41,258	41,255
21	346,04	341,61	341,43	240	39,176	39,717	39,714
22	333,39	329,04	328,86	250	37,766	38,295	38,293
23	321,67	317,40	317,23	260	36,466	36,980	36,978
24	310,79	306,59	306,43	270	35,262	35,760	35,758
25	300,64	296,52	296,38	280	34,144	34,624	34,622
26	291,16	287,12	286,98	290	33,103	33,563	33,562
27	282,28	278,32	278,19	300	32,131	32,570	32,569
28	273,94	270,06	269,94	310	31,220	31,640	31,638
29	266,08	262,30	262,17	320	30,365	30,764	30,763
30	258,68	254,97	254,86	330	29,560	29,940	29,939
31	251,68	248,06	247,95	340	28,802	29,162	29,161
32	245,06	241,52	241,41	350	28,084	28,426	28,425
33	238,78	235,32	235,22	360	27,406	27,728	27,728
34	232,82	229,45	229,35	370	26,761	27,066	27,066
35	227,15	223,86	223,77	380	26,149	26,438	26,437
36	221,76	218,54	218,46	390	25,567	25,839	25,838
40	202,54	199,63	199,55	400	25,012	25,268	25,268

des inconnues à l'aide des fonctions d'énergie du modèle GA. L'équation devient ici :

(2)
$$W\frac{\delta p}{p} = -2\int_b^a \left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)' V(r)\,dr + \int_b^a \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)' L(r)\,dr,$$

où W est l'énergie cinétique totale du manteau. L'adaptation de cette relation au cas actuel ne présente pas de difficultés : les perturbations cherchées étant des fonctions continues formées de segments linéaires, leurs gradients $(\delta\beta/\beta)'$ et $(\delta\rho/\rho)'$ sont constants dans chacun des segments et on peut donc les extraire de la fonction à intégrer. Ainsi, pour l'intervalle allant de 100 à 160 km de profondeur, la première des deux intégrales à droite de (2) fournit le terme :

$$-2(x_2 - x_3)\,V_{23}$$

où V_{23} est la valeur moyenne de $V(r)$ dans l'intervalle, x_2 et x_3 étant les valeurs inconnues de $\delta\beta/\beta$ aux extrémités de l'intervalle. Une fois l'équation (2) transformée en une somme de termes de ce genre, on regroupe ceux-ci pour obtenir les coefficients des inconnues. Le coefficient de x_3, par exemple, sera, après division par W :

$$2(V_{23} - V_{34})/W.$$

Les coefficients de x_1 et x_2, par suite de l'intervalle supplémentaire allant de 35 à 40 km et de la discontinuité de la perturbation de la vitesse à 35 km de profondeur, prennent une forme un peu plus compliquée que nous n'écrirons pas.

Le Tableau 3 donne les coefficients a_{ij} des 9 inconnues pour un ensemble de 28 valeurs de n. Le vecteur des observations (valeurs de $\delta p/p$) est

TABLEAU 3

Matrice des coefficients

n	a_{i1} 10^{-4}	a_{i2} 10^{-4}	a_{i3} 10^{-4}	a_{i4} 10^{-4}	a_{i5} 10^{-4}	a_{i6} 10^{-4}	a_{i7} 10^{-4}	a_{i8} 10^{-4}	a_{i9} 10^{-4}
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	177	286	279	283	297	319	— 1227	771	1395
3	216	350	343	349	367	393	— 1217	1051	1220
4	267	433	425	434	456	487	— 1160	1323	1015
5	327	530	521	532	558	593	— 1055	1534	811
6	392	637	625	637	667	704	— 910	1667	630
7	462	749	734	747	777	815	— 745	1723	482
8	534	866	847	858	888	922	— 573	1722	366
9	608	984	960	968	995	1025	— 396	1678	277
10	683	1104	1073	1078	1100	1122	— 230	1607	209
11	758	1224	1186	1184	1199	1212	— 74	1518	159
12	834	1343	1296	1287	1294	1294	69	1421	121
15	1057	1693	1613	1572	1542	1495	412	1124	53
18	1270	2020	1899	1815	1735	1631	635	865	23
21	1469	2321	2152	2016	1878	1712	768	659	11
24	1654	2595	2373	2180	1980	1750	834	503	5
25	1713	2681	2439	2226	2004	1755	847	461	
30	1986	3073	2733	2416	2087	1737	854	301	
35	2230	3410	2966	2540	2107	1669	827	199	
40	2450	3703	3150	2617	2086	1574	776	137	
50	2839	4187	3410	2668	1969	1350	660	68	
60	3179	4569	3562	2628	1798	1124	561	37	
70	3489	4877	3636	2531	1607	915	481	20	
80	3778	5125	3648	2397	1413	735	418	12	
100	4312	5475	3531	2059	1046	453	325	3	
150	5465	5618	2687	1128	389	105	208	1	
200	6179	4817	1544	433	96	15	151		
300	5583	2248	243	24	2		79		
400	3886	820	25				38		

donné dans le Tableau 4 pour chacun des trois cas d'inversion que nous allons considérer.

1er cas, vecteur $\vec{\Delta}_1$: recherche d'une solution pour $\delta\beta/\beta$. Les inconnues sont x_1 à x_6. Les observations sont les différences $\delta p/p$ entre les valeurs propres du modèle JA et celles du modèle de référence GA.

2e cas, vecteur $\vec{\Delta}_2$: recherche d'une solution pour $\delta\rho/\rho$. Les inconnues sont x_7 à x_9. Les observations sont les différences $\delta p/p$ entre les valeurs propres de JX et celles de JA, ce dernier étant pris comme modèle de référence. Non sans un peu d'illogisme, on utilisera pour cette inversion les éléments de matrice tirés du modèle GA, car les fonctions d'énergie des divers modèles sont censées être interchangeables en vue d'une approximation d'ordre un.

3e cas, vecteur $\vec{\Delta}_3$: recherche simultanée de $\delta\beta/\beta$ et de $\delta\rho/\rho$. Les inconnues sont x_1 à x_9. Les observations sont les différences $\delta p/p$ entre les valeurs propres de JX et celles du modèle de référence GA.

Le Tableau 4 donne aussi les éléments du vecteur des termes de deuxième ordre $\vec{\Gamma}$, dont la signification sera précisée plus loin.

Il est à noter que $\vec{\Delta}_3$ est extrêmement voisin de $\vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2$; les deux perturbations $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$ agissent donc d'une manière indépendante. Mais il ne s'ensuit pas nécessairement qu'on pourra les séparer dans le problème inverse : cela dépendra des propriétés de la matrice des coefficients.

TABLEAU 4

Vecteurs des observations (en %)

n	$\vec{\Delta}_1$	$\vec{\Delta}_2$	$\vec{\Delta}_3$	$\vec{\Gamma}$
2	0,412	0,426	0,839	0,014
3	0,506	0,390	0,898	0,015
4	0,627	0,347	0,976	0,017
5	0,765	0,303	1,070	0,017
6	0,913	0,263	1,178	0,019
7	1,063	0,230	1,296	0,019
8	1,214	0,204	1,420	0,021
9	1,361	0,183	1,547	0,022
10	1,504	0,167	1,674	0,023
11	1,641	0,155	1,798	0,024
12	1,772	0,146	1,920	0,027
15	2,120	0,126	2,249	0,034
18	2,396	0,116	2,515	0,041
21	2,607	0,108	2,718	0,048
24	2,759	0,102	2,864	0,053
25	2,799	0,100	2,902	0,056
30	2,927	0,092	3,022	0,055
35	2,964	0,084	3,050	0,046
40	2,933	0,077	3,012	0,026
50	2,736	0,066	2,804	— 0,024
60	2,426	0,056	2,484	— 0,096
70	2,053	0,049	2,103	— 0,175
80	1,645	0,043	1,689	— 0,257
100	0,798	0,034	0,833	— 0,389
150	— 1,096	0,022	— 1,074	— 0,449
200	— 2,295	0,015	— 2,280	— 0,236
300	— 2,683	0,008	— 2,676	— 0,027
400	— 2,023	0,004	— 2,019	— 0,063

3. *Constatations préliminaires.*

Rappelons que les équations des observations peuvent s'écrire sous la forme d'une seule équation matricielle :

$$\mathbf{A}\,\vec{X} = \vec{\Delta} \tag{3}$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice des coefficients, $\vec{X}$ le vecteur des inconnues et $\vec{\Delta}$ le vecteur des observations Chacune des lignes de (3) représente une équation de la forme :

$$\sum_j a_{ij}\, x_j = \Delta_i. \tag{4}$$

Pour résoudre le système par la méthode des moindres carrés, on doit prémultiplier (3) par la matrice transposée $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\,\vec{X} = \tilde{\mathbf{A}}\,\vec{\Delta} \tag{5}$$

et trouver la solution de (5) soit par inversion de la matrice carrée $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$, soit par élimination des inconnues, ce qui équivaut à une triangularisation de $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$. La solution est unique si la matrice $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ n'est pas singulière, c'est-à-dire si son déterminant n'est pas nul.

A la suite d'environ une centaine d'essais d'inversion portant sur les éléments du Tableau 3, une première constatation générale s'est dégagée : la matrice $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ n'est jamais singulière, de sorte que, au moins en théorie, le système est déterminé et doit conduire à une solution unique. Mais la matrice $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ est souvent presque singulière (son déterminant est petit) et la solution instable (des

changements légers dans le vecteur des observations la modifient profondément).

D'autre part on peut relever au moins 4 sources d'erreurs dans le vecteur des observations et dans les autres éléments du système :

a) *Erreurs d'arrondi.* Elles affectent tous les éléments du système, avant même l'inversion. Au cours de l'inversion, il est possible en principe de les rendre négligeables en faisant tous les calculs avec grande précision. Les résultats qui suivent ont été obtenus, à l'aide d'une calculatrice de bureau qui assure une précision de 6 ou 7 chiffres. Dans certains essais cette précision n'a pas suffi et la solution a été gâtée par les erreurs d'arrondi. Le système, dans un tel cas, est trop déficient pour que la solution soit significative.

b) *Erreurs d'hypothèse.* On désignera par cette expression les erreurs introduites par la forme mathématique imposée à la solution et par le choix des inconnues. Elles seraient nulles si cette forme était la plus générale possible, mais ceci exigerait un nombre élevé d'inconnues et entraînerait une instabilité plus grande de la solution.

c) *Erreurs d'observation.* Elles sont absentes dans les essais purement numériques. Dans les applications à la Terre réelle, il faudrait probablement, pour obtenir des solutions sûres et suffisamment détaillées, que les périodes soient connues à 4 chiffres significatifs. Cette précision peut difficilement être obtenue à l'heure actuelle, même après discussion et lissage des données. Pour tirer de celles-ci des renseignements assez sûrs, on se verra amené à diminuer le nombre des inconnues, c'est-à-dire à renoncer au détail.

d) *Erreurs de deuxième ordre.* Elles proviennent du fait que les termes de deuxième ordre des perturbations doivent être négligés au cours de la première approximation. Le vecteur $\vec{\mathcal{R}}$ des résidus des observations par rapport à la solution $\vec{X}$ cherchée, qui est $\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{A}\vec{X} - \vec{\Delta}$, donne une bonne idée de l'importance et de la distribution de ces erreurs dans le problème actuel, où les autres types d'erreurs ne jouent qu'un rôle effacé. Si on calcule ces résidus pour chacun des 3 cas d'inversion considérés ici, on remarque que :

1) les résidus de $\vec{\Delta}_1$ (erreurs de deuxième ordre dues à la perturbation de la vitesse) sont de l'ordre de 0,020 % quand $n < 25$. Ils augmentent ensuite rapidement, et leur moyenne quadratique est environ 0,200 % pour n compris entre 25 et 400 ;

2) les résidus de $\vec{\Delta}_2$ (erreurs de deuxième ordre dues à la perturbation de la densité) ne dépassent jamais 0,025 % ; leur moyenne quadratique est de 0,013 % pour l'ensemble des observations ;

3) les résidus de $\vec{\Delta}_3$ sont voisins de ceux de $\vec{\Delta}_1$, les uns et les autres sont voisins des termes de deuxième ordre $\vec{\Gamma}$. On peut donc dire que les erreurs de deuxième ordre sont sans importance quand n est faible, et qu'elles proviennent essentiellement de la perturbation de la vitesse. Mais si l'on cherche simultanément une solution pour la vitesse et pour la densité, elles peuvent gâter la solution relative à la densité, par suite d'un phénomène de couplage entre les deux catégories d'inconnues. En principe il suffit, pour contrôler ces erreurs, soit de tenir compte des termes de deuxième ordre par la méthode exposée dans la Première Partie, soit de faire des approximations successives. Dans l'un et l'autre cas, il faut d'abord avoir obtenu une solution provisoire bien convergente.

Ces causes d'erreur, alliées à l'instabilité des solutions, risquent par conséquent de faire échouer complètement les essais d'inversion. Mais la difficulté peut être surmontée en soumettant la solution à des contraintes, qui peuvent être soit rigides soit faibles. Déjà le seul fait de limiter le nombre des inconnues (elles sont au nombre de 9 dans le problème actuel) équivaut à un ensemble de contraintes. Il peut devenir nécessaire de diminuer encore ce nombre. Dans ce cas, les équations définissant la manière dont certaines inconnues seront supprimées, constituent des *contraintes rigides*, auxquelles la solution devra nécessairement se conformer. Mais on peut aussi réunir les équations des contraintes aux équations des observations, de manière à former un système plus large, dont on cherchera la solution par moindres carrés. On parlera dans ce cas de *contraintes faibles.*

D'un point de vue physique, les contraintes peuvent être considérées comme des renseignements supplémentaires sur les inconnues. D'un point de vue numérique, elles ont pour effet, si elles sont convenablement choisies, de rendre la matrice des coefficients moins proche de la singularité, et donc de stabiliser la solution.

Divers procédés permettent d'estimer le degré d'instabilité de la solution. Si, au cours du calcul d'inversion, on est amené à diviser une ou plusieurs fois par des quantités petites, la solution est instable. Pour se faire une idée plus précise du degré d'instabilité, on peut alors modifier légèrement le vecteur des observations et examiner dans quelle mesure la solution s'en trouve altérée. C. Lanczos [1957] propose d'utiliser le *rapport*

critique du système, c'est-à-dire le quotient de la plus grande des valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ par la plus faible, et il estime que ce rapport doit être inférieur à 10^4 pour que la solution soit physiquement significative. Ce procédé exige généralement le recours à un ordinateur. Un procédé numériquement plus simple, et que nous adopterons, consisterait à calculer une seconde solution en imposant une contrainte rigide arbitraire à une des inconnues, et à examiner dans quelle mesure le résidu quadratique moyen a varié, par rapport à celui qui correspondait à la première solution non contrainte. S'il n'avait pas augmenté d'une manière appréciable, la solution serait trop instable pour être significative.

Une dernière série de remarques concerne le poids optimum à attribuer à chacune des équations du système. Si l'on cherche une solution de densité, avec ou sans solution de vitesse, les équations qui correspondent aux basses valeurs de n doivent recevoir des poids relativement importants. En effet, les coefficients des inconnues de densité diminuent très rapidement quand n augmente, d'autant plus rapidement que l'inconnue se rapporte à une couche plus profonde (voir le Tableau 3), de sorte que l'information sur la densité est contenue surtout dans les premières équations de la liste. Inversement les renseignements sur la vitesse dans la couche B, en particulier dans la partie supérieure de la couche B, se trouvent surtout dans les équations correspondant aux valeurs élevées de n. On aura donc avantage à modifier la pondération suivant la nature de la solution cherchée. On peut dire en résumé qu'on devra utiliser d'autant plus les faibles valeurs de n qu'on cherche à étudier des couches plus profondes. Il semble qu'on obtienne les meilleurs résultats en prenant les poids grossièrement proportionnels aux longueurs d'onde.

Le poids optimum à attribuer aux contraintes faibles dépend d'une manière complexe du degré d'instabilité de la solution et de la grandeur du vecteur des erreurs qui se trouve superposé au vecteur des observations. S. Twomey [1963, 1965], dans des études sur le filtrage numérique des solutions des équations intégrales, présente à ce sujet d'utiles indications. On peut en retenir ceci : le poids des équations des contraintes doit être tel que le résidu moyen soit à peu près égal à l'erreur moyenne des observations. Cette règle permet de le déterminer assez facilement par tâtonnement. Du reste, un ordre de grandeur suffit, car en général la solution n'évolue que très lentement quand on fait varier le poids des contraintes.

Les équations des contraintes constituent un système d'équations analogues à (3), que nous écrirons :

$$\mathbf{C}\,\vec{X} = \vec{\Lambda}. \tag{6}$$

Soit w le poids des équations des contraintes (6). Alors pour trouver par la méthode des moindres carrés la solution des systèmes (3) et (6) réunis: on doit modifier (5), de la manière suivante :

$$(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} + w\,\tilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{C})\,\vec{X} = \tilde{\mathbf{A}}\,\vec{\Delta} + w\,\tilde{\mathbf{C}}\,\vec{\Lambda}. \tag{7}$$

Dans la plupart des cas, le membre de droite des équations du système (6) sera nul. D'autre part, w sera en général très petit. Le système (7) finalement, ne diffèrera de (5) que par une légère modification de certains éléments de $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$.

Nous donnerons maintenant les résultats numériques de quelques essais d'inversion portant sur les éléments des Tableaux 3 et 4.

II. Recherche d'une solution pour la vitesse.

1. *Solution sans contraintes.*

Les coefficients a_{ij} des 6 inconnues ($j = 1, 2, \ldots 6$) sont donnés dans le Tableau 3 et le vecteur des observations $\vec{\Delta}_1$ dans le Tableau 4. Les poids utilisés pour les équations sont :

$$0 \text{ pour } n = 2 \text{ à } 24$$
$$1 \text{ pour } n = 25 \text{ à } 400,$$

c'est-à-dire qu'on utilisera seulement les périodes les plus courtes. Le Tableau 5 présente diverses solutions de ce système. La solution 0 est la solution cherchée. L'écart quadratique moyen ξ de chacune des solutions par rapport à la solution cherchée est calculé en utilisant les valeurs numériques des solutions aux profondeurs z figurant dans le tableau. La valeur moyenne x de la perturbation $\delta\beta/\beta$ est calculée pour chacune des solutions au moyen d'une intégration entre 35 et 400 km. $\mathcal{R}$ est le résidu quadratique moyen. $\mathcal{R}'$ est la valeur du résidu correspondant à une solution auxiliaire calculée en imposant à la dernière des inconnues (ici x_3) la contrainte rigide $x_j = 0$. Cette solution auxiliaire, facile à obtenir à partir de la matrice triangulaire qui résulte de l'élimination des inconnues, n'a pas d'intérêt par elle-même et ne figure pas au tableau, la seule chose qui importe étant de savoir si $\mathcal{R}'$ est nettement supérieur à $\mathcal{R}$.

En résolvant le système sans ajouter de

TABLEAU 5

SOLUTIONS POUR $\delta\beta/\beta$ (en %)

z km	0	1	2	3	4	5	6	7
40	— 5,10	— 4,91	— 5,06	— 4,99	— 5,00	— 5,04	— 5,08	— 5,28
100	0,56	— 1,30	0,02	— 0,19	— 0,20	— 0,12	— 0,03	0,72
160	3,87	14,53	3,04	3,34	3,46	3,48	3,46	4,01
220	5,17	— 31,51	5,95	5,81	5,68	5,50	5,30	5,10
280	4,52	57,28	5,60	5,59	5,49	5,41	5,39	4,46
340	2,70	— 23,13	2,95	2,97	3,12	3,38	3,66	2,60
400	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x	2,28	2,14	2,39	2,40	2,40	2,42	2,43	2,27
ξ	—	26,49	0,64	0,60	0,55	0,53	0,56	0,12
$\mathcal{R}$	0,200	0,020	0,101	0,080	0,055	0,046	0,049	0,016
$\mathcal{R}'$	—	0,020	0,111	0,103	0,111	0,128	0,738	0,609

contraintes, on obtient la solution 1 du Tableau 5. Elle est extrêmement mauvaise : les inconnues, pour lesquelles on attendait des valeurs de l'ordre de 5 %, prennent des valeurs énormes, alternativement positives et négatives. L'écart moyen ξ (26 %) est 12 fois plus grand que la perturbation moyenne $\bar{x}$ (2,28 %). Seule la première des inconnues, x_1, correspondant à la profondeur la plus faible, approche de la solution cherchée, sa valeur étant assez bien déterminée par l'équation correspondant à $n = 400$ indépendamment de toutes les autres. Notons aussi que la valeur obtenue pour la perturbation moyenne $\bar{x}$ (2,14 %) n'est pas éloignée de la valeur cherchée (2,28 %).

Pourtant la solution 1 satisfait bien les équations. Le résidu n'est que de 0,020 %. En réalité il est trop faible, le résidu pour la solution cherchée étant 10 fois plus grand. La méthode des moindres carrés assure bien un résidu faible, mais n'assure pas une solution plausible. De plus, le résidu n'augmente pas lorsqu'on supprime une inconnue ($\mathcal{R}' = 0{,}020$ % lui aussi), de sorte que la solution est très instable.

2. *Solutions avec contraintes.*

L'exemple précédent constitue une bonne illustration des conséquences désastreuses de la déficience d'un système d'équations d'observations. Car même si elle était moins mauvaise, la solution 1 serait numériquement trop instable pour être physiquement significative. Et parce qu'elle est très mauvaise, elle ne peut servir de point de départ d'une nouvelle approximation.

La situation change dès qu'on impose à la solution des contraintes faibles, destinées à écarter toutes les solutions de grande amplitude, qui sont *a priori* improbables. Ces contraintes sont les suivantes :

$$x_j = 0, \qquad j = 1, 2 \ldots 6. \tag{8}$$

Elles sont un cas particulier de (6) : $\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ sont ici des matrices identité, et $\vec{\Lambda} = 0$. Par suite de (7), le nouveau système se déduit de celui de l'exemple précédent en ajoutant simplement w aux éléments de la diagonale de $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$.

En prenant $w = 0{,}001$, on obtient la solution 2. La présence des contraintes a complètement transformé la solution. Elle est maintenant voisine de la solution cherchée ($\xi = 0{,}64$ %) et plus stable (le résidu passe de 0,101 à 0,111 % quand on supprime une inconnue).

Le choix de la valeur numérique du poids w n'est pas critique, et on aurait obtenu une solution semblable en prenant $w = 0{,}01$ par exemple. En fait on aurait dû prendre un poids un peu plus grand, puisque le résidu moyen (0,101 %) n'est que la moitié de l'erreur moyenne des observations (0,200 %).

L'écart ξ reste assez important, car le vecteur des erreurs est lui-même appréciable par rapport au vecteur des observations. En tout cas il est assez faible pour permettre une nouvelle approximation à partir de la solution 2.

Les solutions 3, 4 et 5, très semblables à la solution 2, ont été obtenues en utilisant des contraintes

différentes. Les contraintes de la solution 3 :

$$x_j - x_{j+1} = 0 \tag{9}$$

sont destinées à supprimer les *oscillations* de la solution. Celles de la solution 4 :

$$x_j - 2x_{j+1} + x_{j+2} = 0 \tag{10}$$

ont pour but d'assurer une solution à *courbure faible*. Enfin celles de la solution 5 :

$$x_j - 3x_{j+1} + 3x_{j+2} - x_{j+3} = 0 \tag{11}$$

doivent donner une solution *lisse*.

La matrice $\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ des équations des contraintes est donnée dans le Tableau 6 pour les solutions 2, 3, 4 et 5. Le poids w était 0,001 dans les 4 cas.

La solution 6 du Tableau 5 a été obtenue en imposant des contraintes rigides, c'est-à-dire en réduisant le nombre des inconnues. On a supposé que la perturbation de la vitesse, $\delta\beta/\beta$, pouvait être approchée par un polynôme du 3e degré de la profondeur. Cette contrainte se traduit par les formules d'interpolation suivantes :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{16}(5x_1 + 15x_3 - 5x_5) \\ x_4 &= \frac{1}{16}(-x_1 + 9x_3 + 9x_5) \\ x_6 &= \frac{1}{16}(x_1 - 5x_3 + 15x_5). \end{aligned} \tag{12}$$

qui permettent d'éliminer les inconnues x_2, x_4 et x_6. La matrice $\mathbf{A}$ des coefficients restants est donnée dans le Tableau 7. La solution 6 est très semblable à celle qu'on avait obtenue avec des contraintes faibles, et elle est extrêmement stable, mais elle a exigé une hypothèse supplémentaire. Au contraire l'avantage des contraintes faibles est de ne rien présupposer, ou presque rien, quant à la forme de la solution. Si l'une ou l'autre d'entre elles était complètement incompatible avec les équations des observations, elle ne pourrait pas s'imposer à la solution à cause de son faible poids.

3. *Approximation de deuxième ordre.*

Les solutions 2 à 6 sont de bonnes premières approximations : leur écart moyen ξ par rapport à la solution cherchée représente environ le quart de la perturbation moyenne $\bar{x}$.

On a montré dans la Première Partie comment on pouvait, sans reprendre entièrement le travail d'inversion comme l'exigerait la méthode des approximations successives, améliorer considérablement la solution en tenant compte des termes

TABLEAU 6

MATRICE DES CONTRAINTES $\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$

Solution 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution 4

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & & 0 \\ -3 & 10 & -12 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & -12 & 19 & -15 & 6 & -1 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & -15 & 19 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -12 & 10 \end{bmatrix}$$

de deuxième ordre, dont on peut calculer les valeurs approchées en partant d'une solution provisoire. Si $\vec{\Gamma}$ est le vecteur des termes de deuxième ordre, inconnus au départ, le problème à résoudre était :

$$\mathbf{A}\,\vec{X} = \vec{\Delta} - \vec{\Gamma} \tag{13}$$

mais on a d'abord négligé $\vec{\Gamma}$, de sorte que la solution provisoire est celle du problème

$$\mathbf{A}\,\vec{X}' = \vec{\Delta}, \tag{14}$$

et il s'agit maintenant de calculer $\vec{\Gamma}$ à partir de $\vec{X}'$ pour ensuite, en résolvant (13), arriver à une solution définitive.

TABLEAU 7

MATRICE DES COEFFICIENTS POUR 3 INCONNUES DE VITESSE

n	a_{i1} 10^{-4}	a_{i3} 10^{-4}	a_{i5} 10^{-4}
2	269	607	666
3	328	745	822
4	406	923	1021
5	496	1132	1248
6	595	1360	1486
7	700	1602	1727
8	809	1853	1964
9	919	2107	2193
10	1031	2364	2413
11	1142	2621	2619
12	1254	2875	2811
15	1581	3617	3299
18	1890	4304	3654
21	2175	4927	3892
24	2438	5485	4036
25	2521	5656	4064
30	2904	6430	4114
35	3241	7070	4035
40	3632	7602	3876
50	4065	8414	3427
60	4513	8972	2902
70	4912	9346	2364
80	5276	9571	1849
100	5923	9680	918
150	7157	8556	— 634
200	7658	6299	— 1152
300	6284	2364	— 687
400	4142	794	— 256

Pour les modes fondamentaux le calcul de $\vec{\Gamma}$ peut être fait, sans recourir à l'ordinateur, par une méthode variationnelle qu'on a exposée dans la Première Partie. On utilisera ici une méthode plus générale qui fait appel de nouveau au programme de calcul (TOROS) dont on s'est servi pour calculer les périodes et les fonctions propres du modèle de référence. On corrige d'abord le modèle de référence en utilisant la solution provisoire $\vec{X}'$, et, à l'aide du programme de calcul, on obtient les valeurs propres de ce modèle corrigé et on les compare à celles du modèle de référence. Soit $\vec{\Delta}'$ le vecteur des différences relatives entre les deux listes de valeurs propres. Le vecteur $\vec{\Gamma}$ est alors pratiquement :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Delta}' - \mathbf{A}\,\vec{X}' \qquad (15)$$

sauf pour des quantités d'ordre supérieur à 2. Le vecteur $\vec{\Gamma}$ correspondant à la solution 6 a été obtenu de cette manière et est donné dans le Tableau 4. On a aussi calculé quelques-uns de ses éléments par la méthode variationnelle, et le résultat, à peu de chose près, a été le même.

En résolvant ensuite le système (13), on a obtenu la solution 7 du Tableau 5. L'écart moyen ξ par rapport à la solution cherchée n'est plus que 0,12 %, ce qui veut dire que les vitesses du modèle varié ont été retrouvées dans toute la couche B avec une précision d'environ 0,005 km/sec.

III. RECHERCHE D'UNE SOLUTION POUR LA DENSITÉ.

Dans le cas où le modèle de référence (JA) et le modèle varié (JX) ne diffèrent que par leurs distributions de densité, l'inversion des perturbations des valeurs propres semble se faire sans difficulté. Les coefficients des inconnues sont donnés par les 3 dernières colonnes du Tableau 3, et le vecteur des observations est $\vec{\Delta}_2$. Les poids utilisés ont été :

$$10 \text{ pour } n = 2 \text{ à } 6,$$
$$1 \text{ pour } n = 7 \text{ à } 24,$$
$$0 \text{ pour } n = 25 \text{ à } 400.$$

On ne s'est donc pas servi des périodes plus courtes, qui sont peu sensibles à une perturbation de la densité. On a obtenu la solution « brute » donnée dans le Tableau 8 en regard de la solution cherchée. Les valeurs correspondant aux profondeurs de 400, 1000 et 2900 km proviennent directement du calcul d'inversion, les autres d'une interpolation linéaire.

Mais comme les périodes de torsion d'un modèle ne changent pas si les densités sont partout multipliées par un facteur constant, on peut ajouter une constante arbitraire à la solution brute que l'on vient d'obtenir pour $\delta\rho/\rho$. Dans une application à la Terre réelle, cette constante pourra être déterminée en faisant appel à une contrainte très efficace, imaginée par K. E. BULLEN [1959, p. 216], et portant sur le moment d'inertie du noyau. Dans les essais numériques actuels, où l'on veut surtout savoir dans quelle mesure la solution obtenue s'approche de la solution cherchée, on choisira plutôt la constante en demandant que

l'écart moyen ξ soit aussi faible que possible dans l'ensemble du manteau. Le Tableau 8 donne le résultat de cet ajustement, d'ailleurs approximatif : il est basé sur la somme des valeurs numériques prises par la solution à plusieurs profondeurs différentes.

TABLEAU 8

SOLUTION POUR $\delta\rho/\rho$ (en %)

z km	SOLUTION CHERCHÉE	SOLUTION BRUTE	SOLUTION AJUSTÉE
0	0,00	0,00	0,09
400	0,85	0,71	0,80
1000	0,86	0,72	0,81
1500	1,49	1,40	1,49
2000	2,14	2,07	2,16
2500	2,84	2,74	2,83
2900	3,35	3,28	3,37
	11,53	10,92	11,55

Constante : $\frac{1}{7}(11{,}53 - 10{,}92) = +\ 0{,}09$.

La solution ajustée diffère extrêmement peu de la solution cherchée, l'écart moyen n'étant que de 0,04 %. On a donc atteint les densités du modèle varié avec une précision d'environ 0,002 g/cm³ dans l'ensemble du manteau. Ce résultat, obtenu à la suite d'une seule approximation, montre le peu d'importance des erreurs de deuxième ordre quand la vitesse n'est pas perturbée.

Le résidu quadratique moyen des observations est de 0,003 %. Pour avoir une idée de la stabilité de la solution, on en calcule une deuxième soumise à la contrainte rigide $x_9 = 0$. Le résidu augmente à 0,076 %. La première solution était donc non seulement exacte, mais stable.

IV. RECHERCHE DE LA VITESSE ET DE LA DENSITÉ.

1. *Spectre complet des modes fondamentaux.*

Les essais d'inversion précédents ayant réussi, on cherchera finalement à calculer simultanément les perturbations de la vitesse et de la densité, en supposant d'abord qu'on a à sa disposition un spectre assez complet des modes fondamentaux, par exemple $n = 2$ à 400. On utilisera 3 inconnues pour $\delta\beta/\beta$ (leurs coefficients sont ceux du Tableau 7), et 3 pour $\delta\rho/\rho$ (coefficients du Tableau 3), le vecteur des observations étant $\vec{\Delta}_3$ (Tableau 4). Les poids adoptés sont :

$$25 \text{ pour } n = 2 \text{ à } 6,$$
$$1 \text{ pour } n = 7 \text{ à } 24,$$
$$1/16 \text{ pour } n = 25 \text{ à } 400.$$

Cette pondération dissymétrique est en rapport avec les longueurs d'onde des oscillations utilisées.

Le Tableau 9 présente les résultats de divers essais d'inversion de ce système. La solution 0 est la solution cherchée. Les solutions pour la densité sont ajustées de la même manière que la solution 8 du Tableau 8. Les écarts quadratiques moyens ξ sont calculés séparément pour les deux perturbations. La perturbation moyenne de la vitesse, $\bar{x}$, a le même sens que dans le Tableau 5. Pour les

TABLEAU 9

SOLUTIONS POUR $\delta\beta/\beta$ ET $\delta\rho/\rho$ (en %)

SOLUTIONS POUR $\delta\beta/\beta$

z km	0	9	10	11
40	— 5,10	— 4,95	— 4,95	— 5,26
100	0,56	— 0,17	0,02	0,71
160	3,87	3,44	3,47	4,02
220	5,17	5,58	5,29	5,14
280	4,52	5,92	5,39	4,53
340	2,70	4,17	3,66	2,66
400	0,00	0,00	0,00	0,00
$\bar{x}$	2,28	2,63	2,45	2,29
ξ	—	0,85	0,56	0,10

SOLUTIONS POUR $\delta\rho/\rho$

km	0	9	10	11
0	0,00	1,68	0,73	0,26
400	0,85	— 0,22	0,40	0,58
1000	0,86	0,85	0,78	0,85
1500	1,49	1,44	1,44	1,50
2000	2,14	2,04	2,11	2,15
2500	2,84	2,63	2,77	2,80
2900	3,35	3,11	3,30	3,32
$x_9 - x_8$	2,49	2,26	2,52	2,47
ξ	—	0,76	0,33	0,12
$\mathcal{R}$	0,025	0,003	0,032	0,002
$\mathcal{R}'$	—	0,006	0,037	0,006

solutions relatives à la densité, la quantité intéressante est $x_9 - x_8$: à un facteur près, elle est égale au gradient de la perturbation $(\delta\rho/\rho)'$ dans la couche D, dont on essaiera de tirer des renseignements sur la température de l'intérieur du globe dans la suite de ce travail.

La solution 9 est une solution non contrainte du système des 28 équations. Comme première approximation, elle est acceptable : les écarts ξ sont 0,85 % pour la vitesse et 0,76 % pour la densité.

On remarque un certain couplage des inconnues : entre 200 et 400 km de profondeur, les éléments de la solution pour la vitesse ont tendance à prendre des valeurs nettement trop grandes, aux dépens des éléments de la solution pour la densité. De plus la stabilité de la solution laisse à désirer (comparer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, celui-ci étant obtenu avec $x_9 = 0$).

Ces défauts de la solution non contrainte sont en somme les mêmes que ceux de la solution 1, alors qu'on ne cherchait que la vitesse. Du reste, ils sont ici beaucoup moins graves, car la solution n'est pas aberrante et est utilisable en vue d'une nouvelle approximation. Avant de la faire, il serait intéressant d'appliquer des *contraintes de faible amplitude*, analogues à celles de la solution 2. On devrait pouvoir ainsi, comme précédemment, diminuer les effets de couplage entre inconnues augmenter la stabilité, et obtenir une solution plus convergente en vue de l'approximation suivante. La solution 10 a été obtenue à l'aide des contraintes faibles suivantes :

$$c_{jj}\, x_j = 0, \qquad w = 0{,}001, \tag{16}$$

où c_{jj}^2 est un élément de la diagonale de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$. Ce choix revient à multiplier les éléments de cette diagonale par 1,001. En comparant cette solution contrainte 10 à la solution non contrainte 9, on voit en effet que tous les éléments de la solution ont évolué dans le sens prévu : les écarts ξ ont diminué de moitié, le résidu $\mathcal{R}$ est du même ordre que les erreurs de deuxième ordre, la stabilité est plus grande. La quantité $x_9 - x_8$, en particulier, est très voisine de la valeur cherchée.

Les écarts qui demeurent sont dûs aux erreurs de deuxième ordre, c'est-à-dire, en pratique, à cette part de ces erreurs qui relève de la perturbation de la vitesse. Et comme la solution qu'on vient d'obtenir pour la vitesse est presque identique à la solution 6 qui avait servi à calculer les termes de deuxième ordre, on peut ici utiliser de nouveau ces termes, qui sont donnés dans le Tableau 4. Le résultat de cette approximation de deuxième ordre est la solution 11. Les écarts ξ ne sont plus que 0,1 %, de sorte que les vitesses et les densités ont été retrouvées partout avec une précision de l'ordre de 0,004 unité.

D'autres essais ont montré que la stabilité des solutions 9, 10 et 11 serait meilleure si on avait adopté une pondération moins dissymétrique. Elle semble suffisante, en tout cas, pour conduire à des solutions sûres si les données d'observation sont bonnes.

La possibilité d'obtenir simultanément la vitesse et la densité semble à première vue contredire le résultat de L. Knopoff [1961] sur la non-unicité de telles solutions. Mais Knopoff supposait qu'on utilisait *seulement* le spectre des oscillations. Ici, la présence des contraintes, et spécialement des contraintes rigides qui impose aux solutions une forme déterminée dépendant de quelques inconnues seulement, équivaudrait à un supplément important d'information.

2. *Spectre incomplet.*

Dans une application à la Terre, le défaut d'information est aggravé par le fait que l'analyse des enregistrements ne fournit pas, en général, les périodes des oscillations propres d'indice supérieur à 30. Pour compléter le spectre, on pourrait en principe utiliser la dispersion des ondes progressives de Love, mais cette dispersion dépend de plus en plus, quand la période décroît, de la structure particulière de la croûte et du manteau superficiel sur le parcours suivi par le train d'ondes. Il serait donc intéressant de savoir s'il est numériquement possible d'obtenir des renseignements généraux sur les distribution de vitesse et de densité à partir des seules oscillations à très longue période. C'est le but qu'on se propose dans les essais suivants, où l'on utilise seulement les 15 équations à 6 inconnues correspondant aux indices $n = 2$ à 24.

Le système n'est plus assez déterminé pour qu'on puisse en tirer x_1, la perturbation de la vitesse immédiatement sous la croûte. Dans une application à la Terre réelle, cette vitesse est fournie par d'autres méthodes, notamment par la méthode de réfraction. Nous allons donc lever l'indétermination du système en appliquant la contrainte :

$$x_1 = -5{,}08\ \%, \qquad w = 0{,}01,$$

qui est empruntée à la solution cherchée. On obtient la solution 12 du Tableau 10. Les écarts ξ par rapport à la solution 0 (solution cherchée) sont de l'ordre de 0,1 %, cette bonne précision

TABLEAU 10

SOLUTIONS POUR $\delta\beta/\beta$ ET $\delta\rho/\rho$ (en %)

SOLUTIONS POUR $\delta\beta/\beta$

z km	0	12	13	14	15
40	— 5,10	— 5,07	— 5,07	0,01	0,01
100	0,56	0,70	0,88	0,08	— 0,17
160	3,87	3,97	4,07	1,63	1,48
220	5,17	5,14	5,05	3,52	3,64
280	4,52	4,60	4,34	4,63	5,00
340	2,70	2,76	2,48	3,83	4,23
400	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\bar{x}$	2,28	2,33	2,27	2,25	2,33
ξ	—	0,08	0,18	2,24	2,30

SOLUTIONS POUR $\delta\rho/\rho$

z km	0	12	13	14	15
0	0,00	0,25	— 0,02	0,06	0,43
400	0,85	0,65	0,81	0,79	0,57
1000	0,86	0,83	0,83	0,81	0,81
1500	1,49	1,49	1,50	1,49	1,47
2000	2,14	2,15	2,18	2,17	2,13
2500	2,84	2,82	2,85	2,85	2,80
2900	3,35	3,34	3,38	3,39	3,33
$x_9 - x_8$	2,49	2,52	2,56	2,58	2,52
ξ	—	0,12	0,03	0,04	0,20
$\mathcal{R}$	0,019	0,002	0,003	0,002	0,002
$\mathcal{R}'$	—	0,002	0,011	0,013	0,026

étant due à la faible importance des erreurs de deuxième ordre quand n est petit. Par contre la solution 12 n'est pas stable (le résidu n'augmente pas quand on supprime l'inconnue x_9), de sorte que la solution ne serait pas sûre si des erreurs d'observation étaient présentes.

La stabilité ne peut être obtenue qu'en introduisant une contrainte supplémentaire. La solution stable 13, par exemple, résulte de l'application des deux contraintes suivantes :

$$x_1 = -5{,}08\ \%,\ x_7 - x_8 = 0,\ w = 0{,}01,$$

suggérées par la solution cherchée. D'autres essais du même genre ont permis de constater que l'application de deux contraintes compatibles avec la solution cherchée conduit toujours à une solution exacte et stable. On peut donc conclure que le nombre effectif d'inconnues qui peuvent être déterminées par les observations, se trouve réduit à quatre.

Les solutions 14 et 15 montrent ce qui se produit si les hypothèses supplémentaires sont fausses. Pour la solution 14, on a introduit deux hypothèses exprimées par les contraintes suivantes :

$$x_1 = 0,\quad x_7 - x_8 = 0,\quad w = 0{,}01,$$

et la première hypothèse, qui concerne la vitesse, est fausse. La solution pour la densité est néanmoins exacte. La solution pour la vitesse, par contre, a peu de rapports avec la solution cherchée, sauf la perturbation moyenne $\bar{x}$ qui est exacte.

Pour la solution 15, les contraintes étaient :

$$x_1 = 0,\quad x_7 - 0{,}38\, x_8 = 0,\quad w = 0{,}01,$$

c'est-à-dire que les deux hypothèses supplémentaires sont fausses. La solution pour la vitesse, ici encore, est loin de la solution cherchée, sauf sa moyenne x, qui est exacte. La solution pour la densité est médiocre dans la région visée par la deuxième hypothèse (couches B et C) mais exacte dans la couche D où le gradient $x_9 - x_8$, en particulier, est exact.

Ces expériences numériques, qui peuvent paraître artificielles, illustrent cependant certaines propriétés des très longues périodes, liées aux distributions de l'énergie dont on déduit les coefficients des inconnues (voir Tableau 3). Quand n augmente, l'énergie potentielle (coefficients des inconnues de la vitesse) augmente uniformément dans toute la couche B, alors que le lagrangien (coefficients des inconnues de la densité) diminue très rapidement dans la couche D. Les longues périodes peuvent donc distinguer nettement entre une perturbation de la vitesse dans la couche B et une perturbation de la densité dans la couche D ; elles ne sont pas très sensibles au détail de la perturbation de la vitesse dans la couche B, mais le sont surtout à la moyenne de cette perturbation.

V. Résultats des essais numériques.

Les essais précédents (complétés par un grand nombre d'autres que nous ne rapportons pas ici) permettent de dégager certaines conclusions qui orienteront la suite de ce travail. Elles ne sont valides, en toute rigueur, que pour le problème tel que nous l'avons posé, mais elles fournissent aussi des indications suggestives pour traiter éventuellement d'autres cas d'inversion.

1) L'inversion ne présente pas de grandes difficultés quand on ne cherche qu'une seule des deux distributions, vitesse ou densité.

2) L'inversion est encore possible si l'on cherche simultanément la vitesse dans la couche B et la densité dans l'ensemble du manteau, mais un certain couplage des inconnues se manifeste dans la région où chevauchent les deux perturbations et la stabilité est généralement moins facile à obtenir.

3) L'application de contraintes, dont la signification peut être soit physique, soit purement numérique, constitue un procédé général permettant de transformer une solution instable en une solution stable.

4) Le poids des contraintes doit être tel que le résidu moyen soit grossièrement égal à l'erreur moyenne des observations. Il peut être déterminé par tâtonnement, et sa valeur n'est pas critique.

5) Les erreurs de deuxième ordre proviennent presque exclusivement de la perturbation de la vitesse dans la couche B, ne sont pas importantes quand n est faible, et sont éliminées au cours d'une approximation de deuxième ordre.

6) Le nombre d'inconnues doit toujours demeurer faible pour que la solution présente une stabilité convenable. Le recours à des fonctions linéaires par morceaux semble permettre d'approcher les perturbations cherchées avec une économie d'inconnues satisfaisante.

7) Le gradient de la perturbation de la densité dans la couche D est toujours correctement déterminé par le système des équations (pourvu qu'on utilise les très longues périodes), quel que soit par ailleurs le mérite de la solution, et même si des erreurs d'hypothèses ont été introduites.

8) En utilisant seulement les très longues périodes ($n < 30$) il semble qu'on puisse encore déterminer avec sûreté quatre paramètres indépendants.

BIBLIOGRAPHIE

Bullard E. C., 1957, The density within the Earth. *Verhandel Ned. Geol. Mijnbouwk. Genoot. Geol. Ser.*, **18**, 23-41.

Bullen K. E., 1952, On density and compressibility at pressures up to thirty million atmospheres. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.* **6**, 383.

Bullen K. E., 1959, An Introduction to the Theory of Seismology, 2nd ed., Cambridge.

Gutenberg B., 1953, Wave velocities at depths between 60 and 600 kilometers. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **43**, 223-232.

Gutenberg B., 1959*a*, Physics of the Earth's Interior, Academic Press, New York and London.

Gutenberg B., 1959*b*, Wave velocities below the Mohorovičić discontinuity. *Geophys. Jour.*, **2**, 348-352.

Jeffreys H., 1962, The Earth, 4th ed., Cambridge.

Knopoff L., 1961, Green's function for eigenvalue problems and the inversion of Love wave dispersion data. *Geophys. Jour.*, **4**, 161-173.

Lanczos C., 1957, Applied Analysis, Pitman.

Twomey S., 1963, On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. *Jour. Ass. Comp. Mach.*, **10**, 97-101.

Twomey S., 1965, The application of numerical filtering to the solution of integral equations encountered in indirect sensing measurements. *Jour. Franklin Inst.*, **272**, 95-109.

Verreault F., 1965, L'inversion des périodes propres de torsion de la Terre. I. Théorie des perturbations d'un modèle de Terre. *Ann. Géoph.*, **21**, 252-264.

TROISIÈME PARTIE

Étude physique du manteau terrestre

Résumé. — *Un modèle de référence, aussi proche que possible de la Terre réelle, est proposé pour servir de point de départ dans l'inversion des périodes propres de torsion de la Terre. Les périodes observées à la suite de deux grands séismes sont ensuite utilisées en vue de corriger ce modèle. Dans le modèle de manteau qui résulte de ce calcul, la couche à faible vitesse est nettement confirmée, la vitesse des ondes transversales ayant un minimum d'environ* 4,28 *km/sec vers* 150 *km de profondeur. La distribution trouvée pour la densité dans le manteau profond est intermédiaire entre celle du modèle A de Bullen et celle du modèle de Birch basé sur une relation empirique entre la densité et la vitesse des ondes longitudinales. On utilise ensuite cette distribution de la densité afin d'estimer le gradient thermique dans la couche D et construire un modèle pour les températures du manteau. On trouve ainsi un gradient d'environ* 1,25 *deg/km, et une température de l'ordre de* 4900 °*K à l'entrée du noyau. Les rapports entre la courbe des températures et la courbe de fusion permettent de proposer une explication de la variation du coefficient de Poisson dans le manteau.*

Abstract. — *A reference model, as near as possible to actual conditions within the Earth, is proposed as a starting point for the inversion of torsional eigenperiods. The periods observed following two major earthquakes are then used in order to revise this model. In the resulting model for the mantle, the low-velocity layer is clearly confirmed, the velocity of shear waves showing a minimum of about* 4.28 *km/sec at a depth close to* 150 *km. The density distribution found in the deep mantle is intermediate between the Bullen A model and the Birch model based on an empirical relation between density and velocity of compressional waves. This density distribution is then used to make an estimate of the thermal gradient in Layer D and to build a model for the temperatures in the mantle. One thus finds a gradient of about* 1.25 *deg/km, and a temperature of the order of* 4900 °*K at the boundary of the core. The relations between the resulting temperature curve and the fusion curve are used in order to give a tentative explanation of the variation of Poisson's ratio in the mantle.*

Резюме. — Предлагается реферативная модель, возможно близкая к действительной Земле, как исходная точка для инверсии собственных периодов вращения Земли. Периоды, наблюдаемые после двух больших землетрясений, используются затем для исправления этой модели. В модели мантии, которая вытекает из этого расчёта, слой с малой скоростью чётко подтверждается : скорость поперечных волн показывает минимум приблизительно в 4,28 км/сек около 150 км глубины. Найденное распределение для плотности в глубокой мантии является переходным между плотностью модели А Бюллена и плотностью модели Бирча, основанной на эмпирической зависимости между плотностью и скоростью продольных волн. Затем это распределение плотности используется для оценки термического градиента в слое D и для построения модели температур в мантии. Таким образом находится градиент приблизительно х 1,25 градуса/км и температура порядка 4900° при входе в ядро. Соотношения между кривой темпепатур и кривой плавления позволяют предложить объяснение изменения коэффициента Пуассона в мантии.

I. Modèle de référence.

1. *Rôle du modèle.*

Les périodes propres de torsion τ d'un modèle de Terre dépendent des distributions de la vitesse β des ondes transversales et de la densité ρ dans le manteau terrestre. Des perturbations faibles $\delta\beta$ et $\delta\rho$ de ces distributions se traduisent par une perturbation $\delta\tau$ de chacune des périodes propres. Soit $p = (2\pi/\tau)^2$ la valeur propre du système différentiel pour un mode d'oscillation donné. On a pu démontrer que la perturbation δp de la valeur propre p était donnée au premier ordre par l'expression suivante :

$$(1) \qquad W\frac{\delta p}{p} = 2\int_b^r \frac{\delta\beta}{\beta}\,dV - \int_b^a \frac{\delta\rho}{\rho}\,dL,$$

où W est l'énergie cinétique totale du manteau pour le mode considéré, dV l'énergie potentielle et dL le lagrangien d'une couche infinitésimale comprise entre deux rayons r et $r + dr$, b le rayon du noyau et a celui de la Terre. Quand les périodes et les distributions d'énergie ont été calculées pour un modèle de référence dont les vitesses sont $\beta(r)$ et les densités $\rho(r)$, l'inversion numérique de cette expression doit permettre de calculer les corrections $\delta\beta$ et $\delta\rho$ qui doivent être apportées au modèle pour tenir compte des écarts δp entre les valeurs propres du modèle et celles de la Terre. Un grand nombre d'essais sur modèles numériques ont permis de conclure à la possibilité pratique, dans certaines conditions bien déterminées, de retrouver simultanément une perturbation de la vitesse dans la partie supérieure du manteau et une perturbation de la densité dans l'ensemble du manteau. Les deux premières parties de ce travail ont traité de la théorie des perturbations et des techniques numériques de l'inversion [F. Verreault, 1965]. Dans cette Troisième Partie, nous essaierons d'utiliser les périodes propres de torsion observées à la suite de deux grands séismes pour en tirer des renseignements sur la couche à faible vitesse, la densité et la température interne du Globe.

Théoriquement le choix du modèle de référence devrait être sans influence sur la solution finale du problème, du moins si la solution était unique, c'est-à-dire en pratique numériquement stable. En réalité la stabilité numérique de la solution étant presque toujours assez médiocre, on est amené à imposer à la solution un ensemble de contraintes supplémentaires, ce qui revient finalement à réduire au minimum le nombre des paramètres servant à représenter les perturbations inconnues $\delta\beta$ et $\delta\rho$. Le choix du modèle de référence acquiert de ce fait une importance certaine, car il n'est pas possible en général de corriger d'une manière satisfaisante un modèle complètement arbitraire, qui peut être très éloigné de la Terre réelle, sans un nombre d'inconnues suffisamment grand. Il est donc important de construire un modèle aussi proche que possible de la Terre réelle, en y faisant entrer tous les éléments certains ou probables acquis par d'autres méthodes, afin de pouvoir faire porter les corrections seulement sur les éléments les plus incertains. La solution obtenue dans ces conditions ne sera pas tout à fait indépendante du modèle utilisé comme point de départ, et nous devrons, en construisant celui-ci, justifier certaines options dans la mesure du possible et indiquer les éléments susceptibles d'être révisés.

2. *Modèle de croûte.*

Le modèle de croûte utilisé dans le modèle de référence devra représenter une sorte de structure moyenne ou mixte, intermédiaire entre le type continental et le type océanique. Dans le schéma du Tableau 1 on propose une série de paramètres pour les couches attribuées à ces deux types de

TABLEAU 1

Modèle de croûte

	β km/sec	ρ g/cm^3	Épaisseur (km) Structure continentale	Structure océanique	Structure moyenne
	—	—	—	—	—
Couche liquide	0,00	1,00	0	6	4
Couche supérieure	3,45	2,84	18	0	6
Couche intermédiaire	3,82	3,04	18	6	10
Couche profonde	4,68	3,40	0	24	16

structure jusqu'à une profondeur de 36 km. Pour la croûte moyenne, l'épaisseur de chaque couche est obtenue en pondérant les épaisseurs correspondant aux deux premiers types avec les poids suivants : 1/3 pour le type continental, 2/3 pour le type océanique. La base de la croûte, dans la structure moyenne, se trouve ainsi à 20 km de profondeur.

Pour les structures continentale et océanique, les vitesses et les épaisseurs ont été fixées en prenant des moyennes pondérées des résultats compilés par B. Gutenberg [1959], ayant trait à un grand nombre d'études de la croûte effectuées dans toutes les régions du Globe par les méthodes de réflexion et de réfraction. De même pour les densités, on a pris des moyennes des déterminations faites par H. S. Washington [1922] sur plusieurs centaines d'échantillons de roches ignées continentales et océaniques. (On supposera que les premières représentent la *couche supérieure*, et les secondes la *couche intermédiaire*). Pour la couche profonde, qui appartient au manteau, on supposera provisoirement que la densité est de 3,40 g/cm^3, mais les résultats de l'inversion des périodes de torsion nous conduiront à réviser ce chiffre. Notons que dans le schéma proposé la condition de l'équilibre isostatique entre océans et continents est respectée : la somme des produits épaisseur × densité est la même (105,84) pour les trois types de structure.

On a donc un modèle de croûte cohérent et physiquement significatif, qui donne probablement une représentation acceptable des conditions moyennes sur l'ensemble de la surface terrestre. Il ne sera pas possible, en tout cas, de l'améliorer en utilisant les oscillations de torsion d'indice n inférieur à 30, car les très longues périodes ne sont pas sensibles à des détails de l'ordre d'une dizaine de kilomètres, leur longueur d'onde étant au moins 100 fois supérieure.

3. *Modèle de manteau.*

Nous diviserons le manteau en trois grandes couches ou régions analogues à celles de Bullen, ayant les limites suivantes :

20 à 200 km de profondeur pour la couche B ;

200 à 900 km de profondeur pour la couche C ;

900 à 2900 km de profondeur pour la couche D ;

On sait que Bullen plaçait la base de la couche B vers 410 km de profondeur, par analogie avec la distribution des vitesses de Jeffreys. Mais celle-ci comportait une interprétation de la *discontinuité des 20°* qui ne s'est pas imposée. Il semble aujourd'hui acquis que les vitesses séismiques, après avoir passé par un minimum, possèdent déjà à 200 km de la surface le gradient élevé et presque constant qui caractérise la couche C.

On utilisera dans le modèle de référence les vitesses de Gutenberg. Elles sont données dans le Tableau 2.

TABLEAU 2

Modèle de référence R

z km	α km/sec	β km/sec	ρ g/cm^3
0-4	1,5	0,000	1,000
4-10	5,8	3,450	2,840
10-20	6,6	3,820	3,040
20	8,2	4,680	3,400
50	8,1	4,577	3,429
100	8,0	4,441	3,476
150	7,9	4,373	3,522
200	8,0	4,400	3,567
250	8,3	4,497	3,641
300	8,5	4,620	3,715
350	8,8	4,764	3,789
400	9,0	4,924	3,862
500	9,6	5,271	4,005
600	10,1	5,622	4,141
700	10,5	5,935	4,268
800	10,9	6,170	4,385
900	11,3	6,286	4,488
1000	11,4	6,356	4,547
1200	11,8	6,489	4,622
1400	12,0	6,614	4,774
1600	12,3	6,731	4,883
1800	12,5	6,840	4,989
2000	12,8	6,941	5,091
2200	13,0	7,034	5,191
2400	13,2	7,119	5,287
2600	13,5	7,196	5,381
2800	13,7	7,265	5,471
2900	13,7	7,240	5,519

Pour construire un modèle cohérent de la densité, nous nous inspirerons à la fois des idées de K. E. Bullen et de F. Birch, que nous allons résumer brièvement.

Dans les couches B et D, Bullen [1959] utilise l'équation d'Adams et Williamson :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = \frac{g}{\varphi}, \qquad (2)$$

où ρ est la densité, z la profondeur, g la gravité, et φ une fonction $\alpha^2 - 4\beta^2/3$ des vitesses séismiques α et β. Les conditions de validité de cette équation sont les suivantes :

1) la tension se réduit à une pression hydrostatique ;

2) la composition chimique est homogène ;

3) le gradient thermique est adiabatique.

Bullen suppose ces conditions remplies dans les couches B et D, mais pas dans la couche C, où l'augmentation rapide des vitesses séismiques avec la profondeur ne peut s'expliquer sans faire appel à une variation de la composition chimique ou à un changement de phase graduel. A défaut de renseignements plus précis, il suppose que la densité de cette couche peut être représentée par un polynôme du deuxième degré de la profondeur, dont les trois coefficients pourront être déterminés en exigeant, au sommet de la couche, la continuité de la densité, et à la base de la couche, la continuité de la densité et de son gradient. Si l'équation d'Adams et Williamson est appliquée au noyau externe et à la graine, il devient possible de construire un modèle de densité pour l'ensemble du Globe à condition de se donner les quatre valeurs numériques suivantes :

1) le saut de la densité à l'entrée de la graine ;

2) la densité au sommet de la couche B (3,32 d'après Bullen) ;

3) la masse de la Terre, soit $5{,}977 \times 10^{27}$ g ;

4) le moment d'inertie de la Terre, soit $8{,}091 \times 10^{44}$ g/cm^2.

E. C. Bullard [1957] a repris les calculs de Bullen afin de voir dans quelle mesure le résultat était affecté par les incertitudes des hypothèses et des quantités numériques utilisées. Il montre d'abord que les incertitudes provenant des vitesses séismiques n'ont pratiquement pas d'importance. Il étudie ensuite l'effet de la discontinuité à l'entrée de la graine, dans des noyaux soumis aux conditions d'Adams et Williamson. L'introduction de cette discontinuité se traduit par une diminution de Z, coefficient d'inertie du noyau, qu'on définit par la relation :

$$Z = \frac{I_c}{M_c r_c^2}, \tag{3}$$

où I_c est le moment d'inertie du noyau, M_c sa masse et r_c son rayon. Appelons D le saut de la densité, exprimé en g/cm^3, à l'entrée de la graine. Si l'on s'en tient aux modèles possédant dans le manteau une zone de transition graduelle C, et donc physiquement significatifs, on peut conclure des calculs de Bullard que, pour des valeurs de D pas très élevées, on a pratiquement :

$$Z = 0{,}3896 - 0{,}0016D, \tag{4}$$

avec une précision de l'ordre de 0,0002 environ.

Bullard étudie enfin l'effet d'un gradient thermique supérieur au gradient adiabatique, ce dernier ne paraissant pas assez fort pour que le noyau puisse être fondu. La densité augmente alors nettement moins vite, si bien qu'il pourrait être possible, dans le cas où la densité serait déterminée d'une manière indépendante, de calculer le gradient thermique réel.

Birch [1961] cherche empiriquement une relation entre la densité des roches et la vitesse α des ondes longitudinales. A la suite d'un grand nombre d'analyses de roches effectuées aux conditions ordinaires de température et de pression, il établit la relation linéaire :

$$\rho = A(m) + 0{,}302\alpha, \tag{5}$$

où $A(m)$ dépend seulement de la masse atomique moyenne m. Pour les valeurs de m qui intéressent le manteau, les résultats de Birch peuvent être mis sous la forme suivante :

$$A(m) = 0{,}77 + 0{,}24(m - 21). \tag{6}$$

Ces relations permettent de donner une courbe de densité pour le manteau, en utilisant les vitesses α de Gutenberg par exemple, et en supposant que le noyau remplit les conditions d'Adams et Williamson. Mais la méthode a l'inconvénient de faire appel à une relation isotherme qui ne peut s'appliquer rigoureusement au manteau. De plus, dans une couche à vitesse décroissante telle que la couche B, elle conduit à admettre une densité décroissante et par conséquent une structure instable. Elle n'exige pas, par contre, que l'on connaisse la densité au sommet de la couche B comme dans la méthode de Bullen.

La méthode de Bullen, d'autre part, présente l'inconvénient d'avoir à utiliser pour la couche de transition C un polynôme de la profondeur sans signification physique. Et si la continuité de la densité au sommet et à la base de la couche C ne soulève pas d'objections, la continuité du *gradient* de la densité à la base de la couche, que Bullen exige aussi pour déterminer les coefficients du polynôme, semble *à priori* improbable, car les vitesses séismiques subissent une discontinuité de gradient à cette profondeur.

Dans notre modèle de référence, nous conserverons finalement l'essentiel des idées de Bullen, mais nous supposerons pour la couche C une relation analogue à celle de Birch :

$$\rho = A + B\alpha, \tag{7}$$

dont les coefficients A et B seront déterminés numériquement en exigeant la continuité de la densité (mais non de son gradient) au sommet et à la base de la couche. Nous introduirons aussi divers changements dans les constantes numériques. Les limites

de la couche C seront 200 et 900 km, au lieu de 413 et 984 km. La densité au sommet de la couche B sera de 3,40 g/cm³ au lieu de 3,32. Enfin le saut de densité D à l'entrée de la graine sera de 2 g/cm³, alors qu'il est de 5 dans le modèle A de BULLEN.

La valeur réelle de D reste d'ailleurs assez mal connue. BULLEN lui suppose des valeurs comprises entre 0 et 10, et adopte finalement 5 dans son modèle A. Il semblerait possible d'admettre des limites plus rapprochées. Car d'une part la vitesse des ondes longitudinales, à l'entrée de la graine, passe assez brusquement de 10 à 11 km/sec environ, et il est probable par conséquent que la densité fait un saut du même ordre de grandeur. D'autre part l'abondance chimique des éléments lourds dans la matière cosmique est très faible, et on imagine mal pour cette raison comment la graine pourrait être beaucoup plus dense que le noyau externe. Tout compte fait il semblerait raisonnable d'admettre que le saut de densité n'est pas nul, mais n'est pas non plus très grand, et nous supposerons D = 2 dans notre modèle de référence. La valeur adoptée pour D a heureusement peu de conséquence pour les densités du manteau.

Le Tableau 3 montre les principales ressemblances et dissemblances entre le modèle A de BULLEN et notre modèle de référence, que nous appellerons modèle R. La distribution de la densité du modèle R est donnée dans le Tableau 2. Le coefficient d'inertie Z a été calculé d'avance à partir de la relation (4), de sorte qu'on n'a pas fait d'intégration dans le noyau. Pour les couches B et D on a maintenu les valeurs de g calculées par BULLARD pour le modèle A. On peut montrer que les erreurs introduites par ces simplifications sont sans importance.

L'ensemble des conditions imposées au modèle R conduit pour la couche C à la relation

$$\rho = 1{,}32 + 0{,}281\alpha.$$

Ceci n'est pas invraisemblable, puisque BIRCH, utilisant (5) pour tout le manteau et supposant m constant, obtenait :

$$\rho = 1{,}13 + 0{,}302\alpha.$$

Les incertitudes principales du modèle R, que l'on essaiera de dissiper en faisant appel aux périodes de torsion, concernent surtout la vitesse β dans la partie supérieure du manteau et le gradient de la densité dans l'ensemble du manteau. Les essais numériques de la Deuxième Partie ont montré qu'on pouvait espérer obtenir des renseignements relativement fermes sur ces éléments, à partir des oscillations à très longue période, et à condition de n'utiliser qu'un petit nombre d'inconnues.

II. DISCUSSION DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES.

1. *Observations des périodes propres.*

Les périodes des oscillations propres de la Terre peuvent être déterminées en soumettant à une analyse harmonique les enregistrements d'instruments à très longue période (extensomètres, gravimètres) prélevés dans les jours qui suivent les grands séismes. La courbe de l'amplitude du déplacement en fonction de la fréquence ou de la période se pré-

TABLEAU 3

HYPOTHÈSES POUR LES MODÈLES A ET R

COUCHE	MODÈLE A	MODÈLE R
B	Limites : 33 et 413 km. Densité au sommet : 3,32. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.	Limites : 20 et 200 km. Densité au sommet : 3,40. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.
C	Limites : 413 et 984 km. $\rho = A + Bz + Cz^2$. Continuité de ρ au sommet. Continuité de ρ et $d\rho/dz$ à la base.	Limites : 200 et 900 km. $\rho = A + B\alpha$. Continuité de ρ au sommet. Continuité de ρ à la base.
D	Limites : 984 et 2898 km. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.	Limites : 900 et 2900 km. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.
Noyau	Discontinuité à la graine : 5. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.	Discontinuité à la graine : 2. Conditions d'ADAMS et WILLIAMSON.

sente comme une série de *pics* plus ou moins aigus se détachant sur le bruit de fond. Pour identifier les pics on attribue à chacun d'eux un mode d'oscillation toroïdal ou sphéroïdal en s'appuyant sur les périodes théoriques d'un des modèles de Terre classiques. En général un certain nombre d'identifications demeurent incertaines, soit parce que le pic en question ne se détache pas assez nettement sur le bruit de fond, soit parce que plusieurs modes ont des périodes voisines de la période observée. Il peut également arriver que le même pic puisse être attribué à l'un ou l'autre mode suivant le modèle de référence utilisé. Dans de bonnes conditions, toutefois, il semble que la période puisse être déterminée à trois chiffres significatifs, ou encore avec une précision de l'ordre de 0,30 %.

Pour les oscillations de torsion, des analyses d'enregistrements ont été faites, à la suite du séisme du Chili du 22 mai 1960, par H. Benioff, F. Press et S. Smith [1961] ; L. E. Alsop, G. H. Sutton et M. Ewing [1961] ; G. MacDonald et N. Ness [1961] ; J. Connes, P. A. Blum, G. et N. Jobert [1962] ; B. Bolt et A. Marussi [1962] ; B. Bolt [1963] ; et à la suite du séisme d'Alaska du 28 mars 1964, par R. Gaulon [1964]. De cet ensemble de données nous avons retenu 275 périodes de torsion attribuées aux modes fondamentaux d'indice n compris entre 2 et 38. Nous avons cru bon de les ranger approximativement en deux classes : les observations *sûres*, au nombre de 154, correspondant aux pics de bonne amplitude et dont l'identification est relativement certaine ; et les observations *douteuses*, au nombre de 121, qui ne remplissent pas l'une ou l'autre de ces conditions.

2. *Lissage des données.*

Avant d'utiliser ce matériel dans le problème de l'inversion, nous essaierons de l'améliorer par un procédé de lissage, justifié d'une manière générale par l'interdépendance étroite qui semble exister entre les périodes d'indice n différent. On avait remarqué dans la Deuxième Partie de ce travail qu'il n'était pas numériquement possible, en utilisant seulement les périodes d'indice $n < 30$, de déterminer par l'inversion plus que 4 ou 5 inconnues. Ceci indique que ces 30 périodes ne sont pas indépendantes, si bien qu'il aurait été possible, en connaissant 4 ou 5 d'entre elles, de prédire toutes les autres.

Le procédé de lissage qui s'avère le plus satisfaisant dans le cas actuel consiste à ajuster un polynôme de l'indice n aux 275 observations par la méthode des moindres carrés. La période elle-même, considérée comme fonction de n, se prête mal à ce procédé, car elle tend vers l'infini quand n tend vers 1 et n'est donc pas une fonction régulière de n. On peut aisément éviter cette difficulté en appliquant le lissage à quelque autre variable liée à la période, par exemple à la vitesse de phase. On a finalement adopté la méthode suivante. Conformément à notre convention habituelle, appelons τ les périodes d'un modèle de référence et $\tau + \delta\tau$ les périodes de la Terre réelle. Le procédé le plus simple et le plus efficace serait alors d'appliquer directement le lissage aux perturbations $\delta\tau/\tau$, puisque ce sont elles qui doivent être utilisées dans l'inversion. En faisant des essais numériques sur des modèles on constate que les écarts relatifs $\delta\tau/\tau$ entre les périodes de deux modèles varient d'une manière lente et régulière avec n et peuvent être représentés par un polynôme en n de degré faible. Par exemple les valeurs de $\delta\tau/\tau$ (exprimées en %) obtenues en comparant les périodes des modèles Jeffreys-Bullen X et Gutenberg-Bullen A peuvent être reproduites à l'aide d'un polynôme de degré 4 avec une précision d'environ 0,01 % quand $n \leqslant 30$. Avec un polynôme de degré 3, la précision est encore de 0,03 %, ce qui correspond à une erreur d'environ une unité du quatrième chiffre significatif des périodes.

Le degré du polynôme à utiliser, lorsqu'il s'agit de données expérimentales, peut être déterminé avec un minimum d'arbitraire de la façon suivante. A l'aide d'un programme de calcul pour l'ordinateur électronique, on ajuste successivement aux valeurs de $\delta\tau/\tau$ une suite de polynômes de degré $k = 0, 1, 2, 3$, etc. Pour chaque valeur de k, le programme permet de calculer le résidu quadratique moyen des valeurs de $\delta\tau/\tau$. A mesure que k augmente le résidu moyen diminue, d'abord assez rapidement, puis il tend à se stabiliser au voisinage d'une valeur constante qu'on peut interpréter comme une sorte de mesure de la dispersion intrinsèque de l'ensemble des données. On cherche alors à repérer la valeurde k pour laquelle le résidu cesse de diminuer d'une manière significative. Il semble possible de la déterminer à une ou deux unités près, et cette précision est généralement suffisante, car la fonction de n résultant du lissage cesse pratiquement d'évoluer quand le résidu moyen ne diminue plus. Dans le cas actuel on trouve que cette valeur de k est d'environ 3 ou 4. Le nombre de coefficients d'un polynôme de degré k étant $k + 1$, ce résultat est en accord avec la constatation faite antérieurement que les périodes ont seulement 4 ou 5 degrés d'indépendance.

Pour le résidu moyen des 275 valeurs de $\delta\tau/\tau$ par rapport à un polynôme de degré 3 ou 4, on trouve 0,65 %, alors que la précision d'une bonne détermination de la période serait d'environ 0,30 %. Cette

valeur élevée de la dispersion intrinsèque des données semble devoir être attribué aux erreurs d'identification des pics. Imaginons par exemple, d'une manière quelque peu arbitraire, que le sous-ensemble des données dont le résidu est supérieur à 0,65 % résulte entièrement d'identifications erronnées et éliminons les observations correspondantes. On constate alors que 42 sur 121 (le tiers environ) des observations qui avaient été classifiées comme *douteuses* sont éliminées, et 19 sur 154 (la huitième partie seulement) des observations qu'on avait classifiées comme *sûres*. Un bon nombre des premières étaient d'ailleurs tellement aberrantes qu'on aurait pu les éliminer de prime abord. L'ajustement d'un polynôme aux valeurs de $\delta\tau/\tau$ fournit ainsi un critère supplémentaire pour l'attribution des modes d'oscillation. Si après cette élimination on ajuste une nouvelle suite de polynômes aux 214 données restantes, on trouve une fois de plus que le degré k du polynôme à retenir est d'environ 3 ou 4, mais le résidu moyen n'est plus que 0,29 %, en accord avec notre estimation probable de la précision d'une bonne détermination.

TABLEAU 4

LISSAGE DES DONNÉES (PÉRIODES EN SEC)

n	ESSAI 1	ESSAI 2	ESSAI 3
2	2636,4	2631,7	2636,3
3	1705,3	1703,7	1705,0
4	1305,3	1305,0	1305,0
5	1076,5	1076,6	1076,2
6	925,9	926,3	925,8
7	818,1	818,5	818,1
8	736,2	736,6	736,3
9	671,4	671,7	671,6
10	618,6	618,8	618,8
11	574,6	574,7	574,7
12	537,1	537,2	537,2
13	504,9	504,8	504,9
14	476,7	476,5	476,6
15	451,7	451,5	451,7
16	429,6	429,3	429,4
17	409,6	409,4	409,5
18	391,6	391,5	391,4
19	375,2	374,9	375,0
20	360,2	360,0	360,0
21	346,3	346,2	346,2
22	333,6	333,5	333,5
23	321,8	321,7	321,7
24	310,8	310,8	310,7
25	300,5	300,6	300,5
26	290,9	291,1	291,0
27	281,9	282,2	282,1
28	273,5	273,8	273,7
29	265,5	265,9	265,7
30	258,1	258,4	258,3
31	251,0	251,3	251,2
32	244,3	244,6	244,5
33	238,0	238,2	238,2
34	232,1	232,1	232,2
35	226,5	226,3	226,4

Le Tableau 4 présente les résultats de trois essais de lissage des périodes de torsion observées. Dans les deux premiers essais, le modèle de référence utilisé pour calculer les valeurs de $\delta\tau/\tau$ était le modèle R qu'on a décrit antérieurement. Le degré du polynôme était de 4 dans le premier essai et de 3 dans le deuxième. Dans le troisième essai, on a utilisé un modèle de référence très différent de R, et un polynôme de degré 3. Dans les trois essais, le résidu moyen des 275 valeurs de $\delta\tau/\tau$ a été pratiquement le même : 0,65 %. On a ensuite éliminé les observations dont le résidu était supérieur à 0,65 %, et on a recommencé le lissage avec les données restantes. Les résultats n'ont d'ailleurs pas été très différents avant et après cette élimination.

Sauf pour $n = 2$ et $n = 3$, les écarts entre les résultats des trois essais sont minimes : un ou deux dixièmes de seconde en moyenne. On pourrait peut-être admettre que ces écarts correspondent aux incertitudes qui subsistent dans les périodes réelles après lissage. Cette conclusion serait sans doute trop optimiste, et il faudra attendre des déterminations plus nombreuses et plus sûres pour pouvoir confirmer les périodes du Tableau 4. Pour le moment, nous ferons l'inversion des périodes résultant du deuxième essai, tout en admettant des écarts possibles de plusieurs dixièmes de seconde, de sorte que les résultats de l'inversion devront être considérés dans une certaine mesure comme provisoires.

III. DENSITÉS ET VITESSES DANS LE MANTEAU.

1. *L'inversion des périodes.*

Une fois qu'on s'est donné les vitesses β et les densités ρ du modèle de référence (Tableau 2) et calculé ses périodes τ (Tableau 5) ainsi que ses distributions d'énergie, l'équation (1) permet de faire l'inversion des périodes propres $\tau + \delta\tau$ de la Terre. Les perturbations $\delta p/p$ des valeurs propres sont calculées à l'aide de l'équation :

$$\frac{\delta p}{p} = \left(1 + \frac{\delta\tau}{\tau}\right)^{-2} - 1. \tag{8}$$

On choisit pour représenter les perturbations inconnues $\delta\beta/\beta$ et $\delta\rho/\rho$ une forme mathématique

convenable, et on transforme l'équation (1) en un système d'équations linéaires dont on obtient la solution par moindres carrés. Le procédé ayant été exposé en détail dans la Deuxième Partie et illustré par un bon nombre d'exemples numériques, il suffira ici de préciser la forme imposée aux perturbations cherchées.

Pour les vitesses, on suppose qu'il n'y a pas lieu de corriger le modèle de référence sauf dans la partie supérieure du manteau, où l'étude des ondes de volume n'a pas pu conduire à des résultats fermes. La perturbation $\delta\beta/\beta$ est donc supposée nulle hors de l'intervalle allant de 20 à 380 km de profondeur. A l'intérieur de cet intervalle, on la représente par un polynôme de la profondeur de degré 3 s'annulant aux deux limites, ce qui n'exige que deux inconnues. (Pour la commodité du calcul, cette courbe du 3e degré est remplacée en fait par une ligne brisée continue, comme dans les exemples de la Deuxième Partie).

Pour la densité, on suppose que la correction cherchée $\delta\rho/\rho$ est nulle dans la croûte, qu'elle peut être représentée par une ligne brisée continue commençant à 20 km de profondeur avec une valeur nulle et allant jusqu'à la base du manteau. Pour ne pas multiplier les inconnues, la ligne brisée n'aura finalement que deux segments, un pour les couches B et C réunies et un pour la couche D. On renonce ainsi à atteindre les détails fins de la distribution de la densité et on se borne à chercher des corrections de grande ampleur.

Les exemples de la Deuxième Partie ont montré qu'il était possible, dans ces conditions, d'obtenir une solution relativement stable. Cette solution peut être considérée comme unique dans un sens bien précis : elle est la seule qui satisfasse à la fois les données expérimentales et les contraintes imposées.

TABLEAU 5

Périodes de torsion (sec)

n	Modèle R	Terre	Modèle S
2	2629,92	2631,7 ?	2631,90
3	1702,74	1703,7 ?	1703,88
4	1304,23	1305,0	1305,09
5	1075,96	1076,6	1076,77
6	925,62	926,3	926,52
7	817,74	818,5	818,78
8	735,70	736,6	736,92
9	670,72	671,7	672,13
10	617,68	618,8	619,27
11	573,39	574,7	575,14
12	535,71	537,2	537,61
13	503,19	504,8	505,22
14	474,77	476,5	476,92
15	449,67	451,5	451,92
16	427,31	429,3	429,64
17	407,24	409,4	409,64
18	389,09	391,5	391,55
19	372,60	374,9	375,10
20	357,52	360,0	360,05
21	343,68	346,2	346,24
22	330,92	333,5	333,49
23	319,10	321,7	321,69
24	308,14	310,8	310,73
25	297,93	300,6	300,52
26	288,39	291,1	290,97
27	279,46	282,2	282,03
28	271,07	273,8	273,64
29	263,19	265,9	265,74
30	255,76	258,4	258,29
31	248,74	251,3	251,25
32	242,10	244,6	244,60
33	235,82	238,2	238,29
34	229,85	232,1	232,30
35	224,18	226,3	226,60

Les exemples de la Deuxième Partie ont montré qu'il était possible, dans ces conditions, d'obtenir une solution relativement stable. Cette solution peut être considérée comme unique dans un sens bien précis : elle est la seule qui satisfasse à la fois les données expérimentales et les contraintes imposées.

L'inversion des périodes (probables) de la Terre données dans le Tableau 5 a conduit à un modèle de manteau que nous appellerons modèle S. Ses vitesses et ses densités sont données dans le Tableau 6 et dans les Figures 1 et 2. Les périodes propres du modèle S ont ensuite été calculées à l'aire du programme TOROS et sont données dans le Tableau 5. Leur écart moyen par rapport aux périodes utilisées dans l'inversion est d'environ 0,2 sec. A cause de la marge d'incertitude des périodes de la Terre, on n'a pas cherché à obtenir un ajustement plus précis par itération de l'inversion.

2. *Discussion des résultats.*

Pour ce qui est des vitesses β, la Figure 1 montre que la couche à faible vitesse est confirmée d'une manière très nette. D'après le modèle S, les vitesses ont un minimum de 4,28 km/sec vers 150 km de profondeur, et dans l'ensemble s'écartent assez peu de la distribution de Gutenberg, tout en étant un peu plus faibles. Mais pour connaître les détails de la distribution il faudrait utiliser des ondes plus courtes.

Pour la densité, l'inversion des périodes propres conduit d'abord à appliquer à la distribution du modèle de référence une correction brute $\delta\rho/\rho$ dépendant de la profondeur. Mais les densités brutes qu'on obtient ainsi peuvent encore être multipliées par une constante arbitraire K sans que les périodes de torsion n'en soient affectées. On profite de ce degré de liberté pour restaurer la masse et le moment

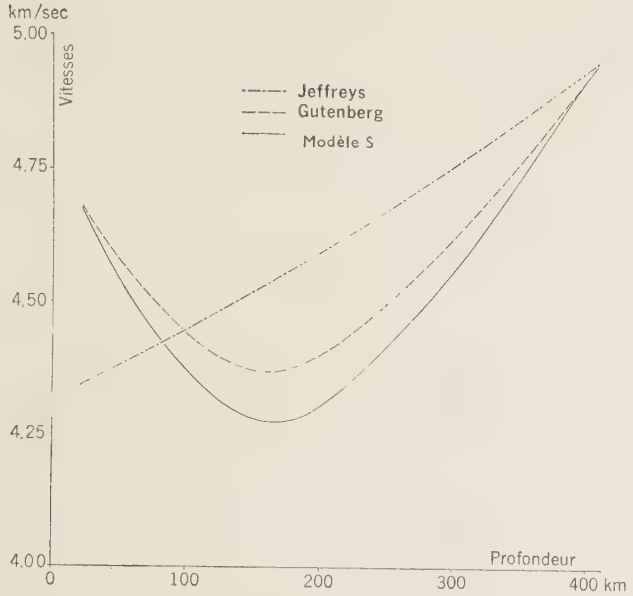

FIG. 1. — Vitesse des ondes transversales dans le manteau supérieur.

d'inertie de la Terre, qui ont été modifiées par la correction. On calcule numériquement le moment d'inertie I_m et la masse M_m du système croûte + manteau après l'application de la correction brute. Ces quantités deviendront $K\,I_m$ et $K\,M_m$ après l'ajustement en question. Soit I_c et M_c le moment d'inertie et la masse du noyau, I et M ceux de la Terre. On devra avoir :

$$(9) \qquad Z = \frac{I_c}{M_c\, r_c^2} = \frac{I - KI_m}{(M - KM_m)\, r_c^2}.$$

Si la discontinuité D à l'entrée de la graine est de 2 g/cm³, alors Z est connu avec une précision suffisante par l'équation (4) et vaut 0,3864 environ. L'équation (9) permet donc de déterminer K. Après avoir multiplié les densités brutes par K, on obtient ainsi automatiquement un modèle possédant des valeurs exactes pour I et M et une valeur de Z correspondant à D = 2. Les densités du manteau dépendent d'ailleurs assez faiblement de D : en prenant par exemple D = 1, Z = 0,3880, les densités du manteau diminuent de 0,07 % seulement, soit d'environ 0,003 g/cm³ en moyenne.

Dans le noyau, en utilisant les modèles de noyau de BULLARD [1957], on obtient les densités suivantes : 10,88 comme densité moyenne ; 9,77 à la surface et 12,1 à la base du noyau externe ; 14,1 à la surface de la graine et 14,3 au centre de la Terre.

On peut ensuite chercher une relation linéaire entre les densités du modèle S et les vitesses α des ondes longitudinales. Pour l'ensemble des couches

TABLEAU 6

MODÈLE S

z km	β km/sec	ρ g/cm³
0-4	0,000	1,000
4-10	3,450	2,789
10-20	3,820	2,985
20	4,680	3,338
50	4,543	3,399
100	4,368	3,442
150	4,279	3,484
200	4,302	3,525
250	4,412	3,605
300	4,563	3,685
350	4,738	3,765
400	4,924	3,844
500	5,271	4,000
600	5,622	4,151
700	5,935	4,294
800	6,170	4,427
900	6,286	4,547
1000	6,356	4,601
1200	6,489	4,706
1400	6,614	4,806
1600	6,731	4,904
1800	6,840	4,997
2000	6,941	5,087
2200	7,034	5,173
2400	7,119	5,256
2600	7,196	5,335
2800	7,265	5,411
2900	7,240	5,452

C et D on trouve, à la suite d'un ajustement par moindres carrés :

$$(10) \qquad \rho = 0{,}797 + 0{,}335\alpha,$$

le résidu quadratique moyen des densités étant d'environ 0,02 g/cm³. Si on substitue $A(m) = 0{,}797$ dans l'équation (6) et qu'on résout pour la masse atomique moyenne m, on obtient :

$$m = 21{,}1.$$

On peut comparer ce résultat aux valeurs de m citées par BIRCH [1961] pour diverses roches : 20,9 en moyenne pour les granites ; 21,4 pour les roches ignées ; 21,8 pour les chondrites.

D'autre part une valeur de $d\alpha/d\rho$ peut être tirée de l'équation (10). On trouve $d\alpha/d\rho = 2{,}99$. BIRCH

Fig. 2. — Densité dans le manteau.

avait obtenu 3,31 en faisant des déterminations directes dans des conditions isothermes. Le changement s'explique aisément par l'existence d'un gradient thermique dans le manteau. On peut écrire en effet :

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}\right)_T + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_\rho \frac{dT}{dz}\frac{dz}{d\rho}, \tag{11}$$

où T est la température. Le premier terme à droite correspond à la quantité mesurée par Birch. Le deuxième terme doit être négatif, puisque les vitesses séismiques diminuent quand la température s'élève. On doit donc avoir, et on a effectivement :

$$\frac{d\alpha}{d\rho} < 3{,}31.$$

Birch avait d'ailleurs remarqué à ce sujet que s'il avait pu tenir compte du gradient thermique du manteau, sa courbe des densités se serait rapprochée de celle de Bullen, et son estimation de la masse atomique moyenne m (qui dépassait 22) aurait été réduite. Le modèle S vérifie précisément ces prévisions (Fig. 2).

Entre 900 et 2900 km de profondeur, la densité du modèle S augmente de 19,9 % alors que dans le modèle de référence R où le gradient thermique était adiabatique, l'augmentation était de 23,0 %. La différence est attribuable à un gradient thermique supérieur au gradient adiabatique, et nous essaierons maintenant de le calculer.

IV. Températures du manteau.

1. *Gradient thermique.*

Birch [1952] a montré que si le gradient thermique n'est pas adiabatique, l'équation (2) d'Adams et Williamson doit être généralisée de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = \frac{g}{\varphi} - \frac{\gamma c_p}{\varphi}\left(\frac{dT}{dz} - \frac{g\gamma T}{\varphi}\right), \tag{12}$$

où z est la profondeur, γ le paramètre de Grüneisen, c_p la chaleur spécifique à pression constante, T la température absolue. Le facteur $\gamma c_p/\varphi$ est le coefficient de dilatation thermique. Nous appellerons gradient *suradiabatique* la quantité figurant dans la parenthèse, qui représente l'excès du gradient réel par rapport au gradient adiabatique.

Bullard [1957] a utilisé l'équation (12) pour étudier l'effet d'un gradient suradiabatique sur la densité du manteau. Si la densité a été obtenue d'une manière indépendante, il devient possible, en considérant (12) comme une équation différentielle pour T, d'inverser le procédé. On écrira donc :

$$\frac{dT}{dz} - \frac{g\gamma T}{\varphi} = \frac{\varphi}{\gamma c_p}\left(\frac{g}{\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\right). \tag{13}$$

Il y a avantage à prendre φ comme variable indépendante au lieu de z. L'équation (13) prend alors la forme suivante :

$$(14) \qquad \frac{dT}{d\varphi} - \frac{g\gamma}{\eta}\frac{T}{\varphi} = \frac{g}{\eta\gamma c_v}\left(1 - \frac{\eta}{g}\frac{d\ \log \rho}{d\ \log \varphi}\right),$$

où $1/\eta = dz/d\varphi$. Cette équation n'étant valable que dans une couche homogène, nous l'utiliserons dans la couche D, dont Birch a montré l'homogénéité probable. Les quantités ρ, φ, g et η sont supposées connues. Il faudra posséder une estimation de γ et de c_v et faire une hypothèse sur la température au sommet de la couche.

La valeur de c_v peut être estimée en considérant que la température caractéristique de Debye est largement dépassée dans la couche D ; on peut donc prendre la *limite classique* 3R, où R, la constante de Boltzmann, vaut $8{,}31 \times 10^7$ ergs/deg/mole. En prenant 21,1 pour la masse atomique on a donc $c_v = 1{,}18 \times 10^7$ ergs/g/deg.

La physique du solide permet de déduire une valeur acceptable du paramètre de Grüneisen à partir des vitesses séismiques et de la densité [Birch, 1952 ; Knopoff, 1963]. Si les valeurs du coefficient de Poisson σ sont voisines de 1/4 le calcul aboutit à la relation suivante :

$$(15) \qquad \gamma = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{d\ \log \varphi}{d\ \log \rho} - 2{,}3\ \frac{d\sigma}{d\ \log \rho}.$$

On se contentera ici d'une valeur moyenne pour l'ensemble de la couche D. En remplaçant les différentielles par des différences finies, on a :

$$(16) \qquad \gamma = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{\log \varphi_2 - \log \varphi_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1} - 2{,}3\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1},$$

où les indices 1 et 2 se rapportent aux profondeurs de 900 et 2900 km respectivement. Prenons $\varphi_1 = 75{,}5$ et $\varphi_2 = 118{,}8$ (km/sec)^2 ; $\rho_1 = 4{,}547$ et $\rho_2 = 5{,}452$ g/cm^3 ; $\sigma_1 = 0{,}27$ et $\sigma_2 = 0{,}30$; les trois termes de (16) deviennent numériquement :

$$\gamma = \frac{1}{3} + 1{,}24 \quad - 0{,}38.$$

La variation de σ reste assez mal déterminée, et il se peut qu'elle dépende en partie de la température [Birch, 1952] ou d'effets secondaires dont on devrait faire abstraction. On obtient en tout cas $\gamma = 1{,}2$ si on en tient compte, et $\gamma = 1{,}6$ environ si on la néglige. Il est donc vraisemblable que γ est compris entre ces limites, mais on devra examiner les conséquences de cette incertitude.

La gravité g varie peu dans la couche D, et on se contentera ici encore d'une valeur moyenne 993 cm/sec^2. De même $\eta = d\varphi/dz$ est pratiquement constant dans la couche D, et on prendra une valeur moyenne 2165 cm/sec^2. Enfin pour $d\ \log \rho/d\ \log \varphi$ on adoptera également une valeur moyenne, car, faute d'avoir pu utiliser dans l'inversion des périodes un nombre d'inconnues suffisant, on ne connaît pas avec précision la dérivée de la densité en chaque point. En remplaçant les différentielles par des différences finies comme pour le deuxième terme de (15), on obtient :

$$d\ \log \rho/d\ \log \varphi = 0{,}403.$$

L'équation (14) prend donc la forme :

$$(17) \qquad \frac{dT}{d\varphi} - \frac{A}{\varphi}T = B,$$

où A et B sont des quantités connues qui dépendent de γ mais non de φ. La solution générale de (17) est :

$$(18) \qquad T = C\varphi^A + \frac{B}{1 - A}\varphi,$$

où C est une constante d'intégration. Pour la déterminer, on écrit que $T = T_1$ et $\varphi = \varphi_1$ à 900 km de profondeur. On obtient ainsi, après avoir éliminé C :

$$(19) \qquad T = T_1\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^A + \frac{B\varphi_1}{1 - A}\left\{\frac{\varphi}{\varphi_1} - \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^A\right\}.$$

Dans cette équation, le premier terme à droite correspond à la courbe adiabatique des températures, le second représente donc la différence entre la courbe réelle et l'adiabatique.

Si on a choisi une valeur de γ l'équation (19) permet de calculer les températures de la couche D à condition de se donner T_1. Or on peut raisonnablement supposer que T_1 est compris entre 2000 °K et 3000 °K. La température des laves volcaniques, dont l'origine est sans doute peu profonde, est déjà de l'ordre de 1500 °K. Il suffirait par conséquent que le gradient moyen soit de l'ordre de 0,5 deg/km pour qu'on atteigne 2000 °K au sommet de la couche D. D'autre part, en adoptant pour T_1 une valeur supérieure à 3000 °K, on risquerait fort d'aboutir à la base du manteau à des températures supérieures au point de fusion, si mal connu soit-il.

Le Tableau 7 donne les températures correspondant à trois valeurs de T_1 (2000°, 2500° et 3000 °K) et à trois valeurs de γ (1,2, 1,4 et 1,6). Les valeurs de φ utilisées sont celles qu'on obtient après lissage à partir des vitesses du Tableau 2. G est le *gradient thermique moyen* dans l'ensemble de la couche D. En examinant ces résultats on peut faire les constatations suivantes :

1) La courbe des températures est pratiquement

TABLEAU 7

Températures de la couche D (°K)

φ (km/sec)^2	γ / z km	1,2	1,4	1,6	1,2	1,4	1,6	1,2	1,4	1,6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
75,5	900	2000	2000	2000	2500	2500	2500	3000	3000	3000
86,3	1400	2600	2565	2546	3138	3110	3097	3676	3655	3649
97,1	1900	3219	3150	3113	3793	3738	3715	4368	4326	4317
108,0	2400	3855	3754	3701	4464	4383	4351	5073	5012	5000
118,8	2900	4505	4371	4304	5147	5040	5002	5788	5709	5699
G deg/km		1,253	1,186	1,152	1,324	1,270	1,251	1,394	1,354	1,350
$T_0 = T_1 - 900G$		872	933	963	1308	1357	1374	1745	1781	1785

une droite de pente G. C'est ainsi, par exemple, que la température au centre de la couche, à 1900 km de profondeur, est dans tous les cas, à 40° près, la moyenne arithmétique des deux températures extrêmes. Ce résultat, à vrai dire, doit provenir dans une certaine mesure du fait qu'on a remplacé par des constantes plusieurs quantités à variation lente qui figuraient dans l'équation différentielle, notamment la dérivée logarithmique de ρ. Il sera néanmoins commode, dans les calculs subséquents, d'assimiler tout à fait la courbe à une droite de pente G. Extrapolons maintenant cette droite jusqu'à la surface. Soit T_0 son ordonnée à l'origine. On a : $T_0 = T_1 - 900$ G. La valeur de T_0 est donnée dans le Tableau 7 pour chacun des cas considérés.

2) Pour une même valeur de T_1, le gradient G dépend étonnamment peu de γ. En étendant le calcul à d'autres valeurs de γ, on trouve que G varie à peine de 10 ou 15 % quand γ prend toutes les valeurs comprises entre 1 et 2. Ce phénomène numérique, que H. Miki [1954] avait remarqué en voulant déduire la température interne d'une équation d'état, s'explique par la structure de l'équation (13) : le gradient dT/dz est la somme de deux termes, dont le premier (gradient adiabatique) est directement proportionnel à γ, alors que le second (gradient superadiabatique) est inversement proportionnel à γ. Si ces deux termes ne sont pas très inégaux, comme c'est ici le cas, leur somme doit être quasi indépendante de γ. La valeur exacte de γ et sa variation avec la profondeur ont donc assez peu d'importance, et on prendra désormais $\gamma = 1{,}6$.

3) Le gradient moyen G augmente lentement quand on augmente T_1. La dépendance est linéaire comme le veut d'ailleurs l'équation (19). Avec $\gamma = 1{,}6$ on a numériquement :

$$G = 0{,}756 + T_1/5052, \tag{20}$$

et comme $T_0 = T_1 - 900$ G, on a aussi en éliminant T_1 :

$$G = 0{,}920 + T_0/4152. \tag{21}$$

On peut dire en conclusion que les densités obtenues par l'inversion des périodes de torsion indiquent une valeur du gradient dans la couche D de l'ordre de 1,25 deg/km. La méthode, dont la sensibilité est passable, mériterait d'être appliquée à des observations plus sûres, quand elles seront disponibles.

2. *Modèle de température.*

A partir de ces renseignements sur le gradient thermique profond, nous essaierons d'obtenir, à l'aide d'hypothèses supplémentaires visant surtout les couches superficielles, une image plus nette et plus complète des températures dans tout le manteau. Il ne pourra s'agir évidemment que d'un modèle, auquel il ne faut pas demander trop de rigueur.

Nous supposerons, comme l'a fait Jeffreys [1962], que la courbe des températures est essentiellement une droite, modifiée près de la surface par une fonction représentant le refroidissement. Ce dernier décroît rapidement avec la profondeur, et nous supposerons assez gratuitement que sa décroissance est exponentielle. Soit $T = T_0 + Gz$ la droite en question, asymptote de la courbe des températures. Nous admettrons qu'elle se confond avec une des droites auxquelles nous avons tout à l'heure assimilé la courbe des températures de la couche D, de sorte que T_0 et G sont liés par l'équation (21). Si la température de la surface est 280 °K, le refroidissement à la surface est $T_0 - 280$, et on peut écrire :

$$T = T_0 + Gz - (T_0 - 280)\, e^{-z/k}, \tag{22}$$

où k est une constante. Il s'agira de se donner trois conditions pour déterminer T_0, G et k. L'équation (21) fournit une de ces conditions. La valeur du gradient thermique en surface, qui peut en principe être observé et auquel nous attribuerons la valeur conventionnelle de 30 deg/km, en fournit une deuxième. La troisième sera fournie par une interprétation, assez communément proposée, de la couche à faible vitesse : elle résulterait de la proximité du point de fusion.

On sait que les paramètres élastiques d'un solide diminuent d'une manière régulière quand la température s'élève, et doivent normalement subir un saut discontinu au point de fusion. Des études expérimentales comme celle de F. Birch et D. Bancroft [1942], ou celle de D. Shimozuru [1957] ont montré qu'en réalité le saut est remplacé par une descente rapide qui commence bien avant le point de fusion. Tous les paramètres élastiques semblent subir cet effet, mais c'est la rigidité, dont dépend la vitesse des ondes transversales, qui est surtout affectée, puisqu'elle doit pratiquement disparaître au point de fusion.

Si c'est bien cet effet qui se produit au sommet du manteau, la couche à minimum de vitesse serait ainsi une couche où l'écart entre la courbe de fusion F(z) et la courbe des températures T(z) passe par un minimum, et vers 150 km de profondeur on aurait :

$$\frac{d}{dz}(F - T) = 0. \tag{23}$$

On connaît malheureusement très mal F(z). En utilisant la théorie de la fusion de Lindemann, des auteurs tels que R. J. Uffen [1952, 1954], J. J. Gilvarry [1957], P. A. Valle [1960] ont proposé des formules reliant le point de fusion aux vitesses des ondes élastiques. En négligeant la variation du coefficient de Poisson σ on peut ramener ces formules à une seule, à celle-ci par exemple due à Uffen :

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \tag{24}$$

où F_0 et φ_0 se rapportent à un état de référence, pression atmosphérique, par exemple. En prenant pour F_0 quelque valeur suggérée par la température des laves ou le point de fusion des roches sous faible pression, et en faisant abstraction de l'hétérogénéité des couches, on obtient, par extrapolation, des valeurs de F de l'ordre de 5000 °K à la base du manteau, mais la marge d'incertitude est très considérable.

Prenons par exemple $F_0 = 1600$ °K et $\varphi_0 = 38{,}0$ (km/sec)². A 900 km de profondeur où $\varphi = 75{,}5$ on aurait F = 3180 °K ; et à 2900 km de profondeur où $\varphi = 118{,}8$ on aurait F = 5000 °K. Le gradient du point de fusion, si pour simplifier on le suppose constant dans chacun de ces deux intervalles, serait donc de 1,75 deg/km jusqu'à 900 km de profondeur et de 0,91 au delà. La courbe de fusion comme celles des vitesses séismiques aurait un coude au sommet de la couche D. Nous adopterons ce schéma à titre indicatif.

L'équation (23) devient donc : $(dT/dz)_{150} = 1{,}75$. On a ainsi une troisième condition pour déterminer les paramètres de l'équation des températures (22). Le résultat est le suivant :

$$T = 1345 + 1{,}24z - 1065e^{-z/37}, \tag{25}$$

où T est en degrés Kelvin et z en kilomètres. Le gradient thermique est :

$$\frac{dT}{dz} = 1{,}24 + 28{,}76e^{-z/37}. \tag{26}$$

Le Tableau 8 montre les valeurs de T et dT/dz d'après ces formules, ainsi que F et F — T.

On pourrait montrer que dans l'ensemble les

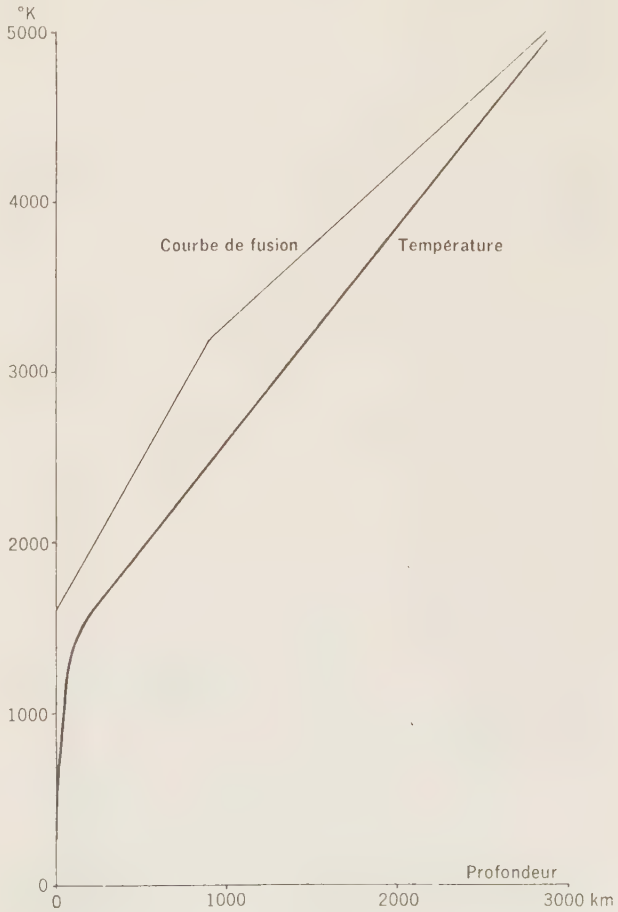

Fig. 3. — Modèle de température.

résultats ne dépendent pas de manière critique des valeurs numériques adoptées pour le gradient en surface et dans la couche à vitesse minima, ni de la forme de la fonction qui représente le refroidissement. Du reste, jusque vers 300 ou 400 km de profondeur, les températures du Tableau 8 ressemblent

TABLEAU 8

Modèle de température

z km	T °K	dT/dz deg/km	F °K	F — T °K
0	280	30,00	1600	1320
50	1131	8,70	1688	557
100	1398	3,18	1776	378
150	1513	1,75	1863	350
200	1589	1,37	1951	362
400	1843	1,25	2302	459
900	2465	1,24	3180	715
1400	3087	1,24	3635	548
1900	3709	1,24	4090	381
2400	4331	1,24	4545	214
2900	4953	1,24	5000	47

passablement à celles qu'ont fournies d'autres méthodes, liées implicitement par des contraintes équivalentes. En général, quelle que soit la voie suivie pour estimer les températures, l'incertitude ne devient importante qu'aux profondeurs moyennes. L'avantage d'une méthode basée sur la variation d'une propriété physique avec la température est de permettre une estimation directe du gradient profond, qui devient l'élément déterminant de la distribution dès qu'on s'est éloigné suffisamment de la surface. Les températures que nous obtenons pour le fond du manteau sont par ailleurs comparables à celles que suggère la variation de la conductivité électrique déduite des phénomènes magnétiques. D. C. Tozer [1959] obtient 4500 °K à la base du manteau avec cette méthode.

Pour continuer la courbe des températures dans le noyau, où le gradient doit normalement être adiabatique, il suffit d'intégrer l'équation :

$$\frac{dT}{dz} - \frac{g\gamma T}{\varphi} = 0, \tag{27}$$

avec une valeur de T égale à 4950 °K à la surface. On trouve ainsi à l'entrée de la graine, environ 6150 °K si $\gamma = 1$, et 6800 °K si $\gamma = 1{,}5$. Certaines estimations du point de fusion du fer à la pression correspondante, qui sont peut-être les mieux fondées, sont de cet ordre de grandeur, de sorte que la distribution obtenue semble encore compatible avec l'hypothèse d'une graine en fer solide.

Le modèle obtenu n'est donc pas dénué de vraisemblance. Si l'on considère toutefois le caractère simpliste des hypothèses, l'effet cumulatif des approximations, la sensibilité limitée de la méthode, et enfin l'incertitude des données initiales, on voit que pour l'instant ces résultats demeurent fragiles.

3. *Coefficient de Poisson et points de fusion.*

L'écart F — T entre température et point de fusion, d'après le modèle du Tableau 8, a une valeur élevée à la surface terrestre, passe par un minimum dans la couche à faible vitesse, augmente ensuite jusqu'à 900 km de profondeur, puis diminue régulièrement jusqu'à la base du manteau. Laissant de côté les valeurs numériques proposées, nous supposerons que ces caractères généraux, d'un point de vue purement qualitatif, correspondent à la réalité. Ils se réduisent, en définitive, à deux hypothèses que nous avons utilisées précédemment : la première, que la courbe de fusion suit d'une manière générale celles des vitesses séismiques ou de φ et subit donc un changement de gradient au sommet de la couche D ; la seconde, que le gradient thermique est constant en première approximation dans l'ensemble du manteau, ou du moins plus constant que le gradient du point de fusion.

D'autre part, toujours d'après le modèle, T ne s'écarte jamais beaucoup de F, sauf près de la surface, et ceci est assez vraisemblable si le manteau a subi la fusion au début de son histoire, car l'on sait que le refroidissement par conduction ne peut pas être important, même après plusieurs milliards d'années, à quelques centaines de kilomètres de la surface. Il serait donc pensable que la réduction de la rigidité au voisinage du point de fusion, que nous avons rendue responsable de la couche à faible vitesse, joue un rôle appréciable dans l'ensemble du manteau. Cette hypothèse, que nous n'essaierons pas d'élaborer quantitativement aurait plusieurs conséquences intéressantes.

La plupart des auteurs qui se sont occupés de la distribution des vitesses dans le manteau ont cru devoir admettre, à l'approche du noyau, une légère diminution des vitesses séismiques ou en tout cas une croissance ralentie. On a donné à cette couche profonde, débutant vers 2700 km de profondeur, le nom de D″. Les arguments en faveur de sa réalité ont été résumés par Gutenberg [1959]. Dans notre hypothèse, la couche D″ pourrait être interprétée

comme une nouvelle couche à faible vitesse semblable à la couche B, produite par la diminution de F — T que nous avons admise dans le manteau profond.

La variation du coefficient de Poisson σ s'expliquerait aussi par cette hypothèse. On sait que σ dépend du rapport α/β des deux vitesses séismiques :

$$\sigma = \frac{(\alpha/\beta)^2 - 2}{2(\alpha/\beta)^2 - 2}, \tag{28}$$

et augmente quand α/β augmente, par exemple quand la rigidité est réduite. Si les vitesses sont influencées par la proximité du point de fusion, σ devrait donc augmenter quand F — T diminue et inversement.

La Figure 4 montre une courbe approximative de σ basée sur les vitesses des Tableaux 2 et 6. Un tracé précis de la courbe supposerait des valeurs très sûres de α et β, mais son comportement général est suffisamment clair : il y a un maximum dans la couche B, un minimum vers 800 km de prodondeur, suivi d'une augmentation régulière jusqu'au noyau. Les courbes de σ données soit par H. Miki [1952], soit par Bullen [1959] d'après les vitesses de Jeffreys, présentent les mêmes caractères. La courbe de F — T de notre modèle de température apparaît également sur la Figure 4, et on voit que la courbe de σ est pratiquement l'image inversée de celle de F — T, comme le veut notre hypothèse. Bien entendu, il n'est pas absolument certain que F — T

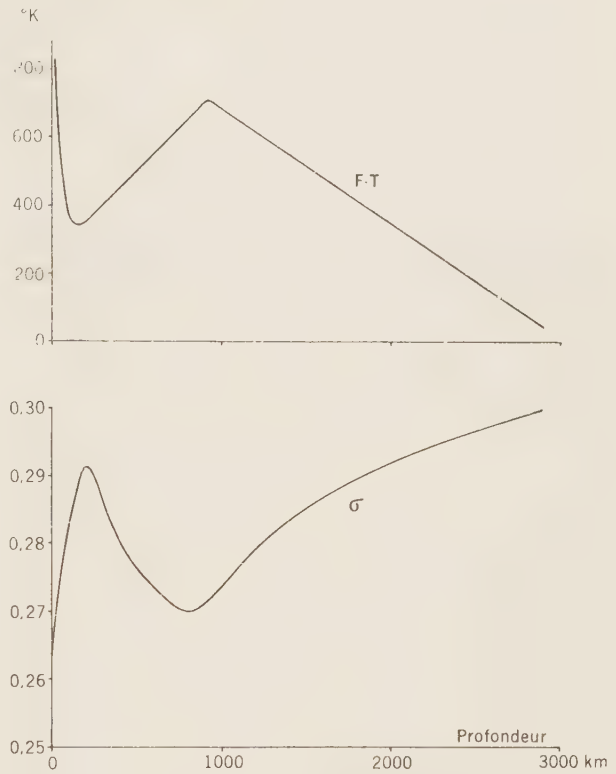

Fig. 4. — Variation du coefficient de Poisson σ et de l'écart F — T entre température et point de fusion.

varie comme nous l'avons supposé, et d'autres explications de la variation de σ restent possibles.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1966.

BIBLIOGRAPHIE

Alsop L. E., Sutton G. H., Ewing M., 1961, Free oscillations of the Earth observed on strain and pendulum seismographs, *Jour. Geoph. Res.*, **66**, 631-641.

Benioff H., Press F., Smith S., 1961, Excitation of the free oscillations of the Earth by earthquakes, *Jour. Geoph. Res.*, **66**, 605-619.

Birch F., 1952, Elasticity and constitution of the Earth's interior, *Jour. Geoph. Res.*, **57**, 227-286.

Birch F., 1961, Composition of the Earth's mantle, *Geophys. Jour.*, **4**, 295-311.

Birch F., Bancroft D., 1942, The elasticity of glass at high temperatures and the vitreous basaltic substratum, *Amer. Jour. Sci.*, **240**, 457.

Bolt B., 1963, Revised torsional eigenperiods from the 1960 Trieste data, *Geophys. Jour.*, **7**, 510-512.

Bolt B., Marussi A., 1962, Eigenvibrations of the Earth observed at Trieste, *Geophys. Jour.*, **6**, 299-311.

Bullard E. C., 1957, The density within the Earth, *Verhandel. Ned. Geol. Mijnbouwk. Genoot. Geol. Ser.*, **18**, 23-41.

Bullen K. E., 1959, An introduction to the theory of seismology, 2nd ed., 296 p., Cambridge University Press.

Connes J., Blum P. A., Jobert G. et N., 1962, Observation des oscillations propres de la Terre, *Ann. Geophys.*, **18**, 260-268.

Gaulon R., 1964 (Communication privée).

Gilvarry J. J., 1957, Temperature in the Earth's interior, *Jour. Atm. Terrestr. Phys.*, **10**, 84-95.

Gutenberg B., 1959, Physics of the Earth's interior, 240 p., Academic Press, New York and London.

Jeffreys H., 1962, The Earth, 4 th ed., Cambridge Univeristy Press.

Knopoff L., 1963, Equations of state of solids at moderately high pressures, *in* High Pressure Physics and Chemistry, vol. 1, R. S. Bradley, ed. ; Academic Press, New York and London, pp. 227-245.

MacDonald G., Ness N., 1961, A study of the free oscillations of the Earth, *Jour. Geoph. Res.*, **66**, 1865-1912.

Miki H., 1954, Temperature distributions within the Earth, *Jour. Phys. Earth*, **2**, 1-3.

Miki H., 1952, Three types of the distributions of temperature and density in the interior of the Earth, *Jour. Phys. Earth.*, **1**, 21-22.

Shimozuru D., 1957, Elasticity of materials near the melting point with special reference to Bullen's Region D'', *Jour. Phys. Earth*, **5**, 61-67.

Tozer D. C., 1959, The electrical properties of the Earth's interior, *Phys. and Chem. of the Earth*, **3**, 414-436, Pergamon Press, London.

Uffen R. J., 1952, 1954, A method of estimating the melting point gradient in the Earth's mantle, *Trans. Am. Geophys. Union*, **33**, 893-896 ; ibid., **35**, 380-381.

Valle P. A., 1960, Una stima del punto di fusione nel mantello della Terra, *Ann. di Geofisica*, **13**, 79-84.

Verreault F., 1965, L'inversion des périodes propres de torsion de la Terre, *Ann. Geophys.*, **21**, 252-264 ; 428-442.

Washington H. S., 1922, Isostasy and rock density, *Bull. Geol. Soc. Am.*, **23**, 372-410.

CONCLUSION

Dans cette étude, dont nous avons limité le champ aux oscillations de torsion, nous avons surtout cherché à élaborer des procédés pratiques permettant d'utiliser les périodes propres en vue de compléter les résultats apportés par d'autres méthodes sur les propriétés physiques de l'intérieur du Globe. Nous avons été conduits à proposer des modifications significatives aux modèles de Terre qui sont le plus souvent utilisés.

Ces modèles dépendent essentiellement de l'étude des courbes de propagation des ondes de volume, dont on peut déduire, par la méthode de Wiechert-Herglotz, les distributions des vitesses des ondes élastiques en fonction de la profondeur. Les modèles de Jeffreys et de Gutenberg, par exemple, illustrent à la fois le succès et les limites de cette méthode : les distributions obtenues par ces auteurs sont en bon accord entre 400 et 2900 km de profondeur, mais diffèrent d'une manière importante dans le manteau superficiel, où la légitimité même de l'application de la méthode est en question. Quant à la distribution de la densité, on en a sans doute une image assez nette depuis les remarquables travaux de Bullen. Mais il ne faut pas perdre de vue le caractère très indirect de ces renseignements, et la part considérable d'hypothèse sur laquelle ils reposent. Le modèle A, par exemple, est solidaire d'une interprétation de la discontinuité des 20° qui est largement contestée à l'heure actuelle, ainsi que de l'hypothèse difficile à vérifier de la compression adiabatique. La découverte des oscillations propres, dont on commence à peine à débrouiller le spectre, permet aujourd'hui de reprendre ces problèmes avec des moyens nouveaux.

En nous appuyant sur une théorie des perturbations d'un modèle de Terre dérivée du principe de Rayleigh, nous avons cherché quels renseignements pouvaient être tirés d'une liste de périodes propres de torsion, même réduite à une trentaine de modes fondamentaux. La difficulté principale de l'inversion a consisté dans l'instabilité de la solution, résultant de la structure même de la matrice d'inversion, et est sans doute liée à la question mal résolue de l'unicité de la solution. Adoptant un point de vue pratique, nous avons montré comment l'application de contraintes permettait de stabiliser les solutions, et ainsi d'écarter les solutions dépourvues de signification physique que le système admet pourtant numériquement. De nombreux essais sur des modèles théoriques ont ensuite illustré les conditions à respecter pour obtenir des renseignements relativement sûrs sur les vitesses des ondes transversales dans le manteau superficiel et sur les principaux caractères de la distribution de la densité dans l'ensemble du manteau. Nous nous sommes placés dans des conditions identiques pour tenter de faire l'inversion des périodes expérimentales, et d'en appliquer les résultats à l'intérieur de la Terre.

Le premier résultat physique qui se dégage de ce travail est la reconfirmation de la couche à vitesse minima qui était le trait caractéristique de la distribution de Gutenberg. Les valeurs de la vitesse que nous obtenons sont même plus faibles que celles de Gutenberg. Mais la forme détaillée de la distribution et la position exacte du minimum ne semblent pouvoir être déterminées qu'en recourant à des ondes plus courtes, en l'occurence aux ondes progressives de Love. Il faudrait alors pouvoir séparer avec précision, dans les courbes de dispersion de celle-ci, ce qui relève des diverses structures situées sur le parcours du train d'ondes.

Simultanément l'inversion des périodes nous a conduits à proposer une nouvelle distribution de la densité du manteau. Ici encore, les périodes très longues que nous utilisons ne permettent pas une description détaillée, mais les traits essentiels de la distribution trouvée semblent pouvoir être retenus. Le résultat le plus significatif est sans doute la mise en évidence d'un gradient relativement faible de la densité entre 900 et 2900 km de profondeur. L'hypothèse de la compression adiabatique exige un gradient de la densité nettement plus fort, et se trouve par conséquent infirmée par les données actuelles sur les périodes de torsion.

Ce résultat nous a incités à tenter une estimation du gradient thermique réel et des températures internes, en utilisant pour ainsi dire le matériau du manteau profond comme thermomètre à dilatation. La principale inconnue de ce nouveau problème est évidemment le coefficient de dilatation thermique. Heureusement, quand on exprime celui-ci en fonction du paramètre de Grüneisen, dont la physique du solide fournit une valeur approximative, on trouve que le gradient thermique est dans une large mesure invariant par rapport à ce paramètre. Cette circonstance favorable nous a permis de proposer une valeur de 1,25 deg/km, avec une

incertitude d'environ 10 %, pour le gradient thermique moyen du manteau profond correspondant à notre modèle de densité.

Les températures internes que suppose cette valeur du gradient sont dans l'ensemble plausibles, mais elles ne sont pas beaucoup plus basses que les températures du fusion communément attribuées aux matériaux du manteau. Nous nous sommes alors demandé si les vitesses séismiques dans l'ensemble du manteau, à l'exception peut-être d'une région mal définie située vers 800 km de profondeur, n'étaient pas influencées par la proximité des points de fusion, capable comme on sait de produire une réduction importante de la rigidité. Divers indices nous ont paru confirmer cette hypothèse, notamment la variation du coefficient de Poisson dans le manteau et le léger fléchissement des courbes des vitesses au voisinage du noyau.

Ces résultats, nous en sommes conscients, ne sauraient être considérés comme définitifs. Leur confirmation exigera, entre autres choses, des études plus poussées sur la question de l'unicité des solutions du problème spectral inverse, et aussi des données beaucoup plus nombreuses, plus sûres, et plus complètes sur le spectre des oscillations propres. Il serait particulièrement important de connaître avec précision les périodes des oscillations les plus longues (dont l'indice est inférieur à 10), et celles des modes supérieurs. Éventuellement, les moyens de calcul le permettant, il pourra devenir possible d'utiliser simultanément les données sur les spectres des oscillations toroïdales et sphéroïdales, les courbes de dispersion des ondes de surface, et les courbes de propagation des ondes de volume, en vue d'une interprétation conjointe. Nous espérons avoir fourni quelques éléments en vue de ces tentatives à venir.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier avec une insistance particulière M. le Professeur J. Coulomb. La confiance qu'il m'a toujours témoignée, la compréhension indulgente dont il a sans cesse fait preuve à mon égard, ont été pour moi une source d'encouragement inestimable, et ses avis sûrs ont aplani les difficultés que j'ai pu rencontrer. Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à M. le Professeur E. Thellier, qui m'a réservé un accueil des plus bienveillants à l'Institut de Physique du Globe de Paris, dont il a mis les moyens de travail à ma disposition, et qui a bien voulu me faire l'honneur de faire partie du jury.

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance sincère à Mme N. Jobert, et à M. G. Jobert, qui ont suivi avec un intérêt constant le développement de ce travail et n'ont jamais cessé de m'apporter l'appui de leur compétence. Leur aide et leurs conseils ont été pour moi le plus précieux des soutiens.

Que l'ensemble des membres de l'Institut de Physique du Globe trouvent ici l'expression de ma vive reconnaissance pour l'assistance multiforme qu'ils m'ont toujours généreusement accordée.

Enfin je ne saurais oublier les membres du Laboratoire de Calcul Numérique de l'Institut Blaise Pascal, dont l'aide empressée ne m'a jamais fait défaut.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE : **Théorie des perturbations d'un modèle de Terre** 3

I. Le système différentiel 3
1. Équation du mouvement 3
2. Propriétés des solutions 4
3. Système associé 5
4. Relations énergétiques 6

II. Perturbations au premier ordre 7
1. Calcul des perturbations des valeurs propres 7
2. Dispersion pour le mode fondamental 8
3. Cas-limite $n = 1$ 9

III. L'inversion des perturbations 9
1. Linéarisation du problème 9
2. Solution par moindres carrés 10
3. Unicité de la solution 11

IV. Perturbations au deuxième ordre 11
1. Minimisation de la valeur propre 11
2. Terme de deuxième ordre des perturbations 12
3. Terme de deuxième ordre dans l'inversion 13
4. Approximations successives 14

V. Programme de calcul 14

DEUXIÈME PARTIE : **Techniques numériques de l'inversion** 16

I. Généralités 17
1. Objet des essais numériques 17
2. Équations des observations 19
3. Constatations préliminaires 21

II. Recherche d'une solution pour la vitesse 23
1. Solution sans contraintes 23
2. Solution avec contraintes 24
3. Approximation de deuxième ordre 25

III. Recherche d'une solution pour la densité 26

IV. Recherche de la vitesse et de la densité 27
1. Spectre complet des modes fondamentaux 27
2. Spectre incomplet 28

V. Résultats des essais numériques 29

TROISIÈME PARTIE : **Étude physique du manteau terrestre** 31

I. Modèle de référence 32
1. Rôle du modèle 32
2. Modèle de croûte 32
3. Modèle de manteau 33

II. Discussion des données expérimentales 35
1. Observations des périodes propres 35
2. Lissage des données 36

III. Densités et vitesses dans le manteau 37
1. L'inversion des périodes 37
2. Discussion des résultats 38

IV. Températures du manteau 40
1. Gradient thermique 40
2. Modèle de température 42
3. Coefficient de Poisson et points de fusion 44

CONCLUSION 47

Imprimerie Taffin-Lefort, à Lille (France). — *Published in France.*

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Informations apportées par les expériences d'ondes de choc sur les propriétés internes du Globe

Vu et approuvé :
Paris, le 9 Mai 1966
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc Zamansky

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean Roche